И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

Москва 2016

УДК 78.3 (077)
ББК 22.11Я73
Б 135

Рецензенты:
А. А. Фомин, доктор физ/мат наук, профессор;
Н. И. Нижников, кандидат физ/мат наук, доктор педагогических наук, профессор.

Баврин, Иван Иванович.

Б 135 Операторы преобразования для краевых задач, интегральных представлений и восстановления зависимостей / И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко. – М.: Издательство «Прометей», 2016. – 358 с.

Предлагаемая монография развивает операторный метод для задач анализа, математической физики неоднородных сред и теории восстановления зависимостей. Операторный метод открывает возможность решения задачи для кусочно однородной среды сведением к соответствующей задаче для однородной среды. В итоге решение получается в форме удобной для изучения. Метод операторов преобразования позволяет в ряде случаев уточнить результаты, полученные методом интегральных преобразований или методами теории потенциалов. Решение, полученное с помощью операторов преобразования, имеет форму удобную для изучения асимптотических свойств. При этом существенно упрощается вычислительный алгоритм, определяется поведение решения вблизи границы.

Метод операторов преобразования раскрывает природу интегральных преобразований, приспособленных для решения задач кусочно-однородных сред. В свою очередь с помощью интегральных преобразований удалось эффективно построить основные операторы преобразования. Рассмотрен стохастический вариант задачи восстановления функциональных зависимостей. Аппаратом решения этой задачи является метод операторов преобразования. Также рассматривается проблема поиска корректных алгоритмов, распознающих данную выборку без ошибок.

ISBN 978-5-9907453-8-4

0.1 Введение

Предлагаемая монография развивает операторный метод для задач теории функций, математической физики неоднородных структур.

Операторы преобразования просто выражаются через интегральные преобразования. Метод интегральных преобразований математически эквивалентен методу собственных функций, но он обладает рядом существенных преимуществ. К этим преимуществам следует отнести стандартную технику вычислений, возможность представления решения в различных видах. Это особенно важно в приложениях, когда необходимо получать решения в удобном для расчета виде как для малых, так и для больших значений независимого переменного. Наконец, при наличии большого количества таблиц прямых и обратных для данного вида преобразований техника вычислений намного упрощается и ускоряется.

На современном этапе в связи с широким применением композиционных материалов возникла острая потребность в решении достаточно широкого класса задач математической физики неоднородных структур. Последнее обстоятельство требует с одной стороны усовершенствования и модифицирования существующего математического аппарата, а с другой стороны создания новых методов. В частности, возникла необходимость в построении таких интегральных преобразований, которые давали бы возможность алгебраизации дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами.

Впервые такие интегральные преобразования появились в математической литературе в 70-х годах XX столетия в работах Уфлянда Я.С. [33] и его учеников и были названы впоследствии гибридными. В этих работах получены интегральные преобразования Фурье-Фурье на полубесконечном и конечном промежутках, гибридные интегральные преобразования Бесселя-Фурье и Фурье-Бесселя на полярной оси. В серии работ конца 80-х годов М.П.Ленюка [20]-[21] теория гибридных интегральных преобразований была существенно продвинута: были сняты ограничения на количество точек сопряжения; вместо условий идеального контакта рассматривались произвольные условия сопряжения; указана логическая схема применения интегральных преобразований к задачам математической физики. Метод скалярных интегральных преобразований не может быть применен в случае задач математической физики, описываемых связными системами дифференциальных уравнений в частных производных. В предлагаемой монографии теория гибридных интегральных преобразований перенесена на матричный случай. В результате открылась возможность решать векторные задачи математической физики.

Матричные интегральные преобразования мы получаем как предел в смысле теории распределений δ- образных последовательностей, в качестве которых используются фундаментальные решения соответствующей задачи Коши. Проиллюстрируем сказанное примером: получим прямое и обратное матричные интегральные преобразования Фурье на действительной оси методом δ- образных последовательностей. Рассмотрим задачу Коши для классического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} - A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad V|_{t=0} = g(x), \tag{0.1}$$

где - действительная матрица размера $\sigma \times \sigma$, у которой все собственные числа положительны, $V = V(t,x)$- вектор-функция размера $\sigma \times 1$. Если предположить, что вектор-функция $V(t,x)$ является оригиналом по Лапласу, то в изображениях задаче (0.1) соответствует задача о конструкции ограниченного на $\boldsymbol{R}$ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} - A^{-2} p V^*(p,x) = -\bar{g}(x), \qquad \bar{g}(x) = A^{-2} g(x); \\ &V^*(p,x) = \int\limits_0^\infty V(t,x)\, e^{-pt} dt. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Непосредственно проверяется, что искомым решением системы уравнений (0.2) является функция

$$V^*(p,x) = \frac{A}{2\sqrt{p}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-A^{-1}\sqrt{p}|x-\xi|}\, \bar{g}(\xi)\, d\xi, \quad Re\sqrt{p} > 0. \tag{0.3}$$

Возвращаясь в (0.3) к оригиналу, получаем решение задачи Коши (0.1):

$$V(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A^{-1}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda \cdot A^{-1}(x-\xi)} d\lambda \right) g(\xi)\, d\xi. \tag{0.4}$$

Из интегрального представления (0.4) следует, что матрично-значная функция

$$G(t, x-\xi) = \frac{A^{-1}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda A^{-1}\cdot(x-\xi)} d\lambda$$

является δ- образной последовательностью по t в смысле теории распределений, т.е.

$$\lim_{t\to 0}\ G\left(t, x-\xi\right) = \delta\left(x-\xi\right) E = \frac{A^{-1}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda A^{-1}x} e^{-i\lambda A^{-1}\xi} d\lambda, \qquad (0.5)$$

где E - единичная матрица размера $\sigma \times \sigma$.

Для вектор- функции $g(x)$ определенной, кусочно-непрерывной на R, абсолютно интегрируемой и имеющей ограниченное изменение на R, как вытекает из интегрального представления δ- функции (0.5), справедлива формула интегрального представления:

$$g\left(x\right) = \frac{A^{-1}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\lambda\xi} g\left(\xi\right) d\xi. \qquad (0.6)$$

Получаем окончательно, что интегральная формула (0.6) порождает прямое F и обратное F^{-1} матричные интегральные преобразования Фурье:

$$F\left[g\right]\ \left(\lambda\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iA^{-1}\cdot\lambda\xi} g\left(\xi\right) d\xi \equiv \hat{g}\left(\lambda\right),$$

$$F^{-1}\left[\hat{g}\right]\ \left(x\right) = \frac{A^{-1}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iA^{-1}\lambda x} \hat{g}\left(\lambda\right) d\lambda.$$

Операторный метод открывает возможность решения задачи для кусочно-однородной среды сведением к соответствующей задаче для однородной среды. В итоге решение получается в форме удобной для изучения. Метод операторов преобразования позволяет в ряде случаев уточнить результаты, полученные методом интегральных преобразований или методом теории потенциалов. Решение, найденное с помощью операторов преобразования, имеет форму, удобную для изучения асимптотических свойств; существенно упрощается вычислительный алгоритм; определяется поведение решения вблизи границы. В настоящей работе метод операторов преобразования применяется в теории интегральных представлений аналитических функций одного и нескольких переменных. Как известно (см., например, [13]), одним из мощных средств исследования в теории голоморфных функций являются интегральные представления. В этом разделе 21 в случае класса ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областей приведено интегральное представление Баврина , выражающее значения голоморфной функции в области из этого класса через значения линейного дифференциального оператора

$$L_{1,z_1^{(0)},z_2^{(0)}}\left[f\left(z_1,z_2\right)\right]=f\left(z_1,z_2\right)+\left(z_1-z_1^{(0)}\right)f'_{z_1}\left(z_1,z_2\right)+\left(z_2-z_2^{(0)}\right)f'_{z_2}\left(z_1,z_2\right)$$

($(z_1^{(0)},z_2^{(0)})$ — фиксированная по произволу точка из указанной области) на ее границе. Из интегральной формулы Баврина, в частности, вытекают известные интегральные представления Темлякова I, II и III рода ([30]-[31]). Здесь же г.21 указано распространение интегральной формулы Баврина на случай n комплексных переменных, из которого, в частности, следует интегральное представление Опиаля и Ситяка[43].

Важная часть работы посвящена теоретическому обосновыванию логической схемы применения операторов преобразования J для решения краевых задач. Оператором преобразования [5] называют оператор J , переводящий один оператор A_1 в другой оператор A_2 . Мы изучаем случай $A_1 = A_2 = \Delta$, т.е. рассматриваем два уравнения Лапласа, с различными граничными операторами G_1 и G_2 . Метод операторов преобразования позволяет выразить решение краевой или смешанной краевой задачи через решение модельной краевой задачи, в роли которой выступает задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве или в шаре.

Ниже мы приводим решения ряда классических задач и некоторых новых краевых задач методом операторов преобразования. Метод операторов преобразования позволяет в ряде случаев уточнить результаты, полученные методом интегральных преобразований или методом теории потенциалов. Решение, найденное с помощью операторов преобразования, имеет форму, удобную для изучения асимптотических свойств; существенно упрощается вычислительный алгоритм; определяется поведение решения вблизи границы. Основную идею метода применения операторов преобразования проиллюстрируем на примере краевых задач для уравнения Лапласа в кусочно-однородном полупространстве. Прямой $J : \hat{f} \to f$ и обратный $J^{-1} : f \to \hat{f}$ операторы преобразования определим равенствами:

$$f(x)=\int\limits_0^\infty u(x,\lambda,G_2)\int\limits_0^\infty u^*(\xi,\lambda,G_1)\ \hat f(\xi)\,d\xi\,d\rho_2(\lambda),$$

$$\hat f(x)=\int\limits_0^\infty u(x,\lambda,G_1)\int\limits_0^\infty u^*(\xi,\lambda,G_2)\ f(\xi)\,d\xi\,d\rho_1(\lambda),$$

соответственно, здесь $u(x,\lambda,G_i)$ - собственная функция краевой задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями G_i , $u^*(\xi,\lambda,G_i)$ - собственная функция сопряженной краевой задачи с сопряженными граничными условиями, $\rho_i(\lambda)$ - спектральная функция. Оператор преобразования J обладает свойствами:

$$J\ \frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\ J,$$

$$J\ G_1|_{x=0}=G_2|_{x=0}.$$

Если граничные условия G_1 "проще"граничных условий G_2 , то открывается возможность решения задачи математической физики со сложными граничными условиями сведением ее к классической задаче. Преимущества метода операторов преобразования:

1) Простой вычислительный алгоритм.

2) Возможность обращения к стандартной библиотеке алгоритмов (при вычислении значений $\hat f$ имеем задачу вычисления интеграла Пуассона для полупространства или для шара).

3) Быстрая сходимость ряда, задающего решение краевой задачи, независимо от того, где лежит точка: на границе области или внутри нее.

4) Простая оценка погрешности: если функция $\hat u$ принадлежит анизотропному пространству Соболева $H_2^{\alpha,\beta}$, (см. [11]), то в ряде, представляющем функцию u , для остатка $r_p(x,y)$ имеем оценку:

$$\|r_p\|\le\|\hat u\|\cdot\left|\frac{1-k}{1+k}\right|^{p+1}.$$

Часть I

Матричные интегральные преобразования со спектральным параметром в граничных условиях и в условиях сопряжения

Глава 1

Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n+1)-$ слойного пространства

1.1 Смешанная краевая задача для оператора Фурье в R_n

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве

$$D^{+} = (0, \infty) \times I_n, \; I_n = \left\{ x : \; x \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} (l_{j-1}, l_j) \, , \quad , \; l_j < l_{j+1} \right\}$$

решения сепаратной матричной системы $(n+1)$ уравнений параболического типа

$$\left(A_j^{-2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_j \left(t, x \right) = 0, \;\; (t, x) \in D^{+}, \;\; j = \overline{1, n+1} \tag{1.1}$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & \cdots & a_{1r}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}^j & \cdots & a_{rr}^j \end{pmatrix} -$$

положительно определенная матрица [28],

по начальным условиям

$$U_j \left(t, x \right) \big|_{t=0} = g_j \left(x \right) , \;\; x \in I_n \tag{1.2}$$

по краевым условиям

$$U_1|_{x=-\infty} = 0\,,\ \ U_{n+1}|_{x=\infty} = 0 \tag{1.3}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} &\left[\left(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k \tfrac{\partial}{\partial t}\right) \tfrac{\partial}{\partial x} + \left(\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k \tfrac{\partial}{\partial t}\right)\right] U_k = \\ &= \left[\left(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k \tfrac{\partial}{\partial t}\right) \tfrac{\partial}{\partial x} + \left(\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k \tfrac{\partial}{\partial t}\right)\right] U_{k+1}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$x = l_k,\ \ k = \overline{1, n};\ \ m = \overline{1,\, 2},$$

здесь $U_j(t, x)$ - неизвестная вектор- функция, $g_j(x)$ - заданная вектор-функция, $\alpha_{mi}^k,\ \beta_{mi}^k,\ \gamma_{mi}^k,\ \delta_{mi}^k$ - матрицы размера $r \times r$.

В образах Лапласа получаем задачу о конструкции ограниченного на множестве I_n решения сепаратной матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 U_j^*}{dx^2} - q_j^2 U_j^* = -\bar{g}_j\left(x\right), \tag{1.5}$$

$$q_j^2 = A_j^{-2} p, \quad \bar{g}_j\left(x\right) = A_j^{-2} g_j\left(x\right),\ \ j = \overline{1, n+1}$$

по краевым условиям

$$U_{n+1}^*\Big|_{x=\infty} = 0\,,\ \ U_1^*|_{x=-\infty} = 0 \tag{1.6}$$

и условиям контакта в точках стыка

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k + \gamma_{m1}^k p\right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{m1}^k + \delta_{m1}^k p\right)\right] U_k^* =$$

$$= \left[\left(\alpha_{m2}^k + \gamma_{m2}^k p\right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{m2}^k + \delta_{m2}^k p\right)\right] U_{k+1}^* +$$

$$+ \left(\gamma_{m1}^k \frac{d}{dx} f_k\left(x\right) + \delta_{m1}^k\, f_k\left(x\right)\right) - \left(\gamma_{m2}^k \frac{d}{dx} f_{k+1}\left(x\right) + \delta_{m2}^k\, f_{k+1}\left(x\right)\right), \tag{1.7}$$

$$x = l_k,\ \ k = \overline{1, n};\ \ i = \overline{1,\, 2}.$$

Примем обозначения

$$M_{ki} = \begin{pmatrix} \beta_{1i}^k + \delta_{1i}^k p & \alpha_{1i}^k + \gamma_{1i}^k p \\ \beta_{2i}^k + \delta_{2i}^k p & \alpha_{2i}^k + \gamma_{2i}^k p \end{pmatrix},$$

$$N_{ki}=\begin{pmatrix}\beta_{1i}^k & \alpha_{1i}^k\\ \beta_{2i}^k & \alpha_{2i}^k\end{pmatrix},\quad T_{ki}=\begin{pmatrix}\delta_{1i}^k & \gamma_{1i}^k\\ \delta_{2i}^k & \gamma_{2i}^k\end{pmatrix},\ k=\overline{1,n};\ i=\overline{1,\,2.}$$

Матричнозначную функцию φ_1 определим равенством:

$$\varphi_1(x,p)=e^{A_1^{-1}(x-l_1)\sqrt{p}};$$

другие матричнозначные функции $\varphi_k,\ \ k=\overline{2,n+1}$ определяются последовательно по индукции с помощью условия:

$$\left[\left(\alpha_{m2}^k+\gamma_{m2}^k p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^k+\delta_{m2}^k p\right)\right]\varphi_{k+1}=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m1}^k+\gamma_{m1}^k p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^k+\delta_{m1}^k p\right)\right]\varphi_k,\quad x=l_k,\ k=\overline{1,n}\ . \qquad (1.8)$$

Считая известной матрицу φ_k, для матрицы φ_{k+1} получим выражение

$$\varphi_{k+1}=\begin{pmatrix} chA_{k+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p} & \frac{A_{k+1}shA_{k+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\end{pmatrix}M_{k2}^{-1}M_{k1}\begin{pmatrix}\varphi_k(l_k)\\ \varphi_k^{/}(l_k)\end{pmatrix}.$$

Аналогично, матричнозначная функция ψ_{n+1} определяется условием $\psi_{n+1}(x,p)=e^{-A_{n+1}^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}$, другие матричнозначные функции ψ_n,ψ_{n-1},...,ψ_1 определяются последовательно по индукции с помощью условия:

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k+\gamma_{m1}^k p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^k+\delta_{m1}^k p\right)\right]\psi_k=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^k+\gamma_{m2}^k p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^k+\delta_{m2}^k p\right)\right]\psi_{k+1}, \qquad (1.9)$$

$$x=l_k,\ k=\overline{1,n};\ \ m=\overline{1,\,2}.$$

Считая известной матрицу ψ_{k+1}, для матрицы ψ_k получим выражение

$$\psi_k=\begin{pmatrix} chA_k^{-1}(x-l_k)\sqrt{p} & \frac{A_k shA_k^{-1}(x-l_k)\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\end{pmatrix}M_{k1}^{-1}M_{k2}\begin{pmatrix}\psi_{k+1}(l_k)\\ \psi_{k+1}^{/}(l_k)\end{pmatrix}.$$

Далее, матрицы Ω_k-размера $2r\times 2r$ определены соотношениями:

$$\Omega_k(\xi,\sqrt{p})=\begin{pmatrix}\varphi_k(\xi,\sqrt{p}) & \psi_k(\xi,\sqrt{p})\\ \varphi_k^{/}(\xi,\sqrt{p}) & \psi_k^{/}(\xi,\sqrt{p})\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,n+1}.$$

Лемма 1.1 *Определители* $\det\ \Omega_k, \quad k=\overline{1,n+1}$ *не зависят от переменной x. Если матрицы* $N_{ki},\ T_{ki},\ k=\overline{1,n};\ i=\overline{1,\,2}$ *- положительно определенные, т.е.*

$$\omega^* N_{ki}\omega>0,\quad \omega^* T_{ki}\omega>0, \omega\in R^n_*,\quad k=\overline{1,n};\ i=\overline{1,\,2}$$

и, если $\det\ M_{ki}\equiv C_{ki}\neq 0$, *то выполнено условие неограниченной разрешимости задачи:*

для $p=\sigma+i\tau$ *с* $Rep=\sigma\geq\sigma_0, Jmp=\tau\in(-\infty,\infty)$,

$$\det\ \ \Omega_k\neq 0,\quad k=\overline{1,n+1}. \tag{1.10}$$

Лемма 1.2 *.Ограниченное на множестве* I_n *решение сепаратной системы (1.5)-(1.7) имеет вид*

$$U^*_j\left(p,x\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} H^*_{j,m+1}\left(p,x,\xi\right)\,\bar{f}_{m+1}\left(\xi\right)d\xi+\varphi_j\left(EO\right)\sum_{m=j}^{n+1}P_m-\psi_j\left(OE\right)\sum_{m=0}^{j-1}P_m, \tag{1.11}$$

$$P_m=\Omega^{-1}_m\,M^{-1}_{m1}\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{c}\left(\gamma^m_{11}f^{/}_m\left(l_m\right)+\delta^m_{11}f_m\left(l_m\right)\right)-\left(\gamma^m_{12}f^{/}_{m+1}\left(l_m\right)+\delta^m_{12}f_{m+1}\left(l_m\right)\right)\\ \left(\gamma^m_{21}f^{/}_m\left(l_m\right)+\delta^m_{21}f_m\left(l_m\right)\right)-\left(\gamma^m_{22}f^{/}_{m+1}\left(l_m\right)+\delta^m_{22}f_{m+1}\left(l_m\right)\right)\end{array}\right),$$

$$m,j=\overline{1,n};\quad P_0=0,\quad P_{n+1}=0,$$

здесь через $H^*_{j,s}$ *обозначены образы матричнозначных функций влияния* $H_{j,s}$*:*

при $k<s$

$$H^*_{k,s}=\varphi_k\left(x,p\right)\,\left(EO\right)\,\Omega^{-1}_s\left(\xi,p\right)\left(\begin{array}{c}O\\E\end{array}\right),\ \ l_{k-1}<x<l_k,\ \ l_{s-1}<\xi<l_s,$$

при $k>s$

$$H^*_{k,s}=-\psi_k\left(x,p\right)\,\left(OE\right)\,\Omega^{-1}_s\left(\xi,p\right)\left(\begin{array}{c}O\\E\end{array}\right),\ \ l_{k-1}<x<l_k,\ \ l_{s-1}<\xi<l_s,$$

при $k = s$

$$H^*_{k,k} = \begin{cases} \varphi_k(x,p)\,(EO)\,\Omega_k^{-1}(\xi,p)\begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k(x,p)\,(OE)\,\Omega_k^{-1}(\xi,p)\begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < \xi < x < l_k. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении каждого из условий (1.5)- (1.7). Приступим к определению функций влияния $H^*_{j,s}$.Конструкция образов Лапласа функций влияния $H^*_{j,s}$ такова, что их особыми точками являются точки ветвления $p = 0$ и $p = \infty$.

В силу леммы Жордана и теоремы Коши [29] находим, что

$$H_{ks}(t,x,\xi) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \varphi_k(x,\lambda)\,(EO)\,\Omega_s^{-1}(\xi,\lambda)\begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix} e^{-\lambda^2 t}\lambda d\lambda, \quad (1.12)$$

$$k, s = \overline{1, n+1}.$$

Возвращаясь в формулах (1.11) к оригиналам, получим решение задачи (1.1)-(1.4) в виде:

$$U_k(t,x) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\int\limits_{l_m}^{l_{m+1}}\varphi_k(x,\lambda)\,\varphi^*_{m+1}(\xi,\lambda)\,f_{m+1}(\xi)\,d\xi + \right.$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\varphi_k(x,\lambda)\,(EO)\,\Omega_m^{-1}(l_m,\lambda)\,M^{-1}_{m1}(\lambda)\cdot \quad (1.13)$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix} \left(\gamma^m_{11}f^/_m(l_m) + \delta^m_{11}f_m(l_m)\right) - \left(\gamma^m_{12}f^/_{m+1}(l_m) + \delta^m_{12}f_{m+1}(l_m)\right) \\ \left(\gamma^m_{21}f^/_m(l_m) + \delta^m_{21}f_m(l_m)\right) - \left(\gamma^m_{22}f^/_{m+1}(l_m) + \delta^m_{22}f_{m+1}(l_m)\right) \end{pmatrix}\right) e^{-\lambda^2 t}\lambda d\lambda,$$

где

$$\varphi^*_m(\xi,\lambda) = (EO)\,\Omega_m^{-1}(\xi,\lambda)\begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix} A_m^{-2}, \quad m = \overline{1, n+1}.$$

1.2 Прямая и двойственная задачи Штурма-Лиувилля для оператора Фурье в I_n

Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+A_m^{-2}\lambda^2\right)y_m(x,\lambda)=0,\quad m=\overline{1,n+1}, \tag{1.14}$$

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k-\lambda^2\gamma_{m1}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^k-\lambda^2\delta_{m1}^k\right)\right]y_k=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^k-\lambda^2\gamma_{m2}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^k-\lambda^2\delta_{m2}^k\right)\right]y_{k+1},$$

$$x=l_k,\quad \|\,y_1\|\,|_{x=-\infty}<\infty,\quad \|\,y_{n+1}\|\,|_{x=\infty}<\infty,$$

$$y_m(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{1m}(x,\lambda)\\ \vdots\\ y_{rm}(x,\lambda)\end{pmatrix},\|y_m\|=\sqrt{y_{1m}^2+...+y_{rm}^2},m=\overline{1,n+1}.$$

Пусть при некотором λ, рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y(x,\lambda)=\sum_{k=2}^{n+1}\theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\,y_k(x,\lambda)+\,\theta(l_1-x)\,y_1(x,\lambda)(x,\lambda).$$

В этом случае число λ называется собственным значением, а соответствующее решение $y(x,\lambda)$ - собственной вектор- функцией.

Теорема 1.1 . *Спектр задачи (1.14) непрерывен и заполняет всю ось* $(-\infty,\infty)$. *Задача Штурма- Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению λ соответствует ровно r линейно независимых собственных вектор- функций* $y^j(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{1j}(x,\lambda)\\ \vdots\\ \varphi_{rj}(x,\lambda)\end{pmatrix}$,$j=\overline{1,r}$.

Рассмотрим двойственную краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$y_m^*(\xi,\lambda)\left(\frac{d^2}{dx^2}+A_m^{-2}\lambda^2\right)=0,\quad m=\overline{1,n+1},$$

$$\left(y_k^*, -\frac{d}{d\xi}y_k^*\right)\begin{pmatrix} \beta_{11}^k - \delta_{11}^k\lambda^2 & \alpha_{11}^k - \gamma_{11}^k\lambda^2 \\ \beta_{12}^k - \delta_{12}^k\lambda^2 & \alpha_{12}^k - \gamma_{12}^k\lambda^2 \end{pmatrix}^{-1} = \tag{1.15}$$

$$= \left(y_{k+1}^*, -\frac{d}{d\xi}y_{k+1}^*\right)\begin{pmatrix} \beta_{21}^k - \delta_{21}^k\lambda^2 & \alpha_{21}^k - \gamma_{21}^k\lambda^2 \\ \beta_{22}^k - \delta_{22}^k\lambda^2 & \alpha_{22}^k - \gamma_{22}^k\lambda^2 \end{pmatrix}^{-1}, \xi = l_k,$$

$$k = \overline{1, n+1}, \quad \| y_1^* \| \big|_{\xi=-\infty} < \infty, \quad \left\| y_{n+1}^* \right\| \big|_{\xi=\infty} < \infty.$$

Решение рассматриваемой краевой задачи будем записывать в виде

$$y^*(\xi,\lambda) = \sum_{k=2}^{n+1} \theta(\xi - l_{k-1})\ \theta(l_k - \xi)\ y_k^*(\xi,\lambda)\ + \theta(l_1 - \xi)\ y_1^*(\xi,\lambda),$$

$$y_m^*(\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} y_{m1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & y_{mr}^*(\xi,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\|y_m^*\| = \sqrt{(y_{1m}^*)^2 + ... + (y_{rm}^*)^2}, m = \overline{1, n+1}.$$

Теорема 1.2 . *Спектр задачи (1.15) непрерывен и заполняет всю ось* $(-\infty,\infty)$. *Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению* λ *соответствует ровно r линейно независимых собственных строк- функций*
$y^{*j}(\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & \varphi_{jr}^*(\xi,\lambda) \end{pmatrix}, j = \overline{1,r}.$

1.3 Теоремы разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n

В силу начальных условий из (1.13) получаем интегральное представление:

$$f_j(x) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x,\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_{k+1}^*(\xi,\lambda)\ f_{k+1}(\xi)\,d\xi + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (E \quad 0)\,\Omega_{k1}^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left.\begin{pmatrix} \left(\gamma_{11}^k f_k^{/}(l_k) + \delta_{11}^k f_k(l_k)\right) - \left(\gamma_{12}^k f_{k+1}^{/}(l_k) + \delta_{12}^k f_{k+1}(l_k)\right) \\ \left(\gamma_{21}^k f_k^{/}(l_k) + \delta_{21}^k f_k(l_k)\right) - \left(\gamma_{22}^k f_{k+1}^{/}(l_k) + \delta_{22}^k f_{k+1}(l_k)\right) \end{pmatrix}\right)\lambda d\lambda, \tag{1.16}$$

$$j=\overline{1,n+1}.$$

Интегральное представление (1.16) приводит к интегральному представлению меры Дирака [65]

$$\delta(x-\xi)E=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\varphi(x,\lambda)\left(\varphi^*(\xi,\lambda)+\sum_{k=1}^{n}(EO)\ \Omega_{k1}^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_+(\xi-l_k)\\ \delta_+^/(\xi-l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_-(\xi-l_k)\\ \delta_-^/(\xi-l_k)\end{pmatrix}\right\}\right)\lambda d\lambda, \tag{1.17}$$

где

$$\varphi^*(\xi,\lambda)=\sum_{k=2}^{n+1}\theta(\xi-l_{k-1})\ \theta(l_k-\xi)\ \varphi_k^*(\xi,\lambda)\ +\theta(l_1-\xi)\ \varphi_1^*(\xi,\lambda).$$

Справедливы утверждения.

Теорема 1.3 . *Если вектор- функция $f(x)$ определена, кусочно- непрерывна, абсолютно суммируема и имеет ограниченную вариацию на I_n, то для каждого $x\in I_n$ справедливо интегральное представление*

$$\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\varphi(x,\lambda)\hat{f}(\lambda)\,d\lambda, \tag{1.18}$$

где

$$\hat{f}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(\xi,\lambda)\ f(\xi)\,d\xi+\sum_{k=1}^{n}(EO)\ \Omega_{k1}^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k f_k^/(l_k)+\delta_{11}^k f_k(l_k)\\ \gamma_{21}^k f_k^/(l_k)+\delta_{21}^k f_k(l_k)\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}\gamma_{12}^k f_{k+1}^/(l_k)+\delta_{12}^k f_{k+1}(l_k)\\ \gamma_{22}^k f_{k+1}^/(l_k)+\delta_{22}^k f_{k+1}(l_k)\end{pmatrix}\right)\right).$$

Теорема разложения в терминах спектральной функции формулируется следующим образом.

Теорема 1.4 *.Если вектор-функция $\hat{f}=\hat{f}(\lambda)$ определена, кусочно- непрерывна, абсолютно суммируемая и имеет ограниченную вариацию на (-∞,∞), то для $x\in(-\infty,\infty)$ справедливо интегральное представление:*

$$\frac{1}{2}\left[\hat{f}(\lambda-0)+\hat{f}(\lambda+0)\right]=-\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{*}(x,\lambda)\,f\;(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}(EO)\;\Omega_{k1}^{-1}(l_k,\lambda)\cdot\right.$$

$$\cdot M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot\left(\left(\begin{pmatrix}\gamma_{11}^{k}f_{k}^{/}(l_k)+\delta_{11}^{k}f_k(l_k)\\ \gamma_{21}^{k}f_{k}^{/}(l_k)+\delta_{21}^{k}f_k(l_k)\end{pmatrix}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\begin{pmatrix}\gamma_{12}^{k}f_{k+1}^{/}(l_k)+\delta_{12}^{k}f_{k+1}(l_k)\\ \gamma_{22}^{k}f_{k+1}^{/}(l_k)+\delta_{22}^{k}f_{k+1}(l_k)\end{pmatrix}\right)\right)\right)d\lambda,$$

где

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\beta)\;\hat{f}(\beta)\,\beta d\beta.$$

Доказательство. Введем пару матричнозначных решений задачи Штурма-Лиувилля (1.14):

$$(c,s)=\sum_{m=2}^{n+1}\theta(x-l_m)\;\theta(l_{m+1}-x)\;(c_m,s_m)\;+\theta(l_1-x)\;(c_1,s_1)\;,$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\begin{pmatrix}c_1(l_1) & s_1(l_1)\\ c_1^{/}(l_1) & s_1^{/}(l_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & E\\ i\lambda E & -i\lambda E\end{pmatrix}.$$

Матрицы $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ определим из условий:

$$c_1+m_1(\lambda)\;s_1=\varphi_1;\;\;c_{n+1}+m_2(\lambda)\;s_{n+1}=\psi_{n+1}.$$

Выберем два числа $\mathrm{N}_1>\mathrm{l}_n$ и $\mathrm{N}_2<\mathrm{l}_1$ ($\mathrm{N}_2<0$). Изучим выражение

$$\int\limits_{N_2}^{l_1}\varphi_1^{*}(x,\lambda)\;\varphi_1(x,\beta)\,dx+\sum_{m=1}^{n-1}\int\limits_{l_m}^{l_{m+1}}\varphi_{m+1}^{*}(x,\lambda)\;\varphi_{m+1}(x,\beta)\,dx+$$

$$+\int\limits_{l_n}^{N_1} \varphi^*_{n+1}(x,\lambda)\ \varphi_{n+1}(x,\beta)\,dx.$$

Непосредственным вычислением правой части с использованием свойств матричнозначных функций φ_k и φ_k^* найдем:

$$\varphi_k^*(x,\lambda)\ \varphi_k(x,\beta) = \frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^*(x,\lambda)\cdot\frac{d\varphi_k(x,\beta)}{dx} - \frac{d\varphi_k^*(x,\lambda)}{dx}\varphi_k(x,\beta)\right];$$

тогда выполнено равенство

$$\int\limits_{N_2}^{N_1} \varphi^*(x,\lambda)\ \varphi(x,\beta)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\left[\varphi_1^*(N_2,\lambda)\frac{d\varphi_1(N_2,\beta)}{dx} - \frac{d\varphi_1^*(N_2,\lambda)}{dx}\varphi_1(N_2,\beta)\right] +$$
$$+\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\left[\varphi_{n+1}^*(N_1,\lambda)\frac{d\varphi_{n+1}(N_1,\beta)}{dx} - \frac{d\varphi_{n+1}^*(N_1,\lambda)}{dx}\varphi_{n+1}(N_1,\beta)\right]. \tag{1.20}$$

Все остальные слагаемые исчезли вследствие условий сопряжения из (1.14). Изучим оба слагаемых в формуле (1.20).

Непосредственным вычислением для первого слагаемого в формуле (1.20) найдем

$$\varphi_1^*(N_2,\lambda)\frac{d\varphi_1(N_2,\beta)}{dx} - \frac{d\varphi_1^*(N_2,\lambda)}{dx}\varphi_1(N_2,\beta) =$$

$$= (E\quad 0)\ \Omega_1^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi_1(N_2,\beta)\\ \varphi_1^{/}(N_2,\beta)\end{pmatrix}.$$

Функции c, s определены таким образом, что

$$\varphi_1^*\frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\varphi_1^*}{dx}\varphi_1 = \begin{pmatrix}\mathrm{E} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & E\\ m_1(\lambda) & m_2(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}\hat{\Omega}_1^{-1}(x,\lambda)\cdot$$

$$\cdot\hat{\Omega}_1(x,\beta)\begin{pmatrix}E & E\\ m_1(\beta) & m_2(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ 0\end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

где

$$\hat{\Omega}_j = \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ c_j^{/} & s_j^{/} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Заметим, что условие (1.10) позволяет утверждать, что

$$\det \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\lambda) & m_2(\lambda) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \lambda \in (-\infty, \infty).$$

Непосредственным вычислением установим тождество:

$$\hat{\Omega}_1^{-1}(N_2, \lambda)\, \hat{\Omega}_1(N_2, \beta) =$$

$$= -\frac{A_1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -iA_1^{-1}(\lambda-\beta)\, e^{-iA_1^{-1}(\lambda+\beta)N_2} \\ -iA_1^{-1}(\lambda-\beta)\, e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} & 0 \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{A_1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} -iA_1^{-1}(\lambda+\beta)\, e^{-iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} & 0 \\ 0 & -iA_1^{-1}(\lambda+\beta)\, e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2} \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

На основании леммы Римана [60], слагаемое в формуле (1.20) соответствующее первому слагаемому в формуле (1.22) имеет пределом при $N_2 \to \infty$ число нуль . Изучим слагаемое в формуле (1.20) отвечающее второму слагаемому в (1.22). Прежде преобразуем это слагаемое:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{e^{iA_1^{-1}(\lambda-\beta)N_2}}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos\ A_1^{-1}(\lambda-\beta)\, N_2 - E}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\cos\ A_1^{-1}(\lambda-\beta)\, N_2 - E}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{-i\ \sin\ A_1^{-1}(\lambda-\beta)\, N_2}{\lambda-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{i\ \sin\ A_1^{-1}(\lambda-\beta)\, N_2}{\lambda-\beta} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}}{(\lambda-\beta)}. \tag{1.23}$$

Совершенно аналогично разложим второе слагаемое в формуле (1.20) на три слагаемых. В итоге правая часть формулы (1.20) представлена как сумма шести слагаемых.

Так как функция $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая на $(-\infty, \infty)$, то леммы Римана и Дирихле [60] позволяет сделать вывод о том, что вклад первого и четвертого слагаемых равен нулю.

Далее вклад в величину предела второго и пятого слагаемых в формуле (1.20) равен $\hat{f}(\beta)$, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Для того, чтобы подсчитать величину вклада в предел третьего и шестого слагаемых, воспользуемся равенством [29]:

$$\lim_{N\to\infty} \int_c^d \frac{1-\cos\ A^{-1}(\lambda-\beta)N}{\lambda-\beta}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda = v.p. \int_c^d \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda-\beta}d\lambda \equiv T_{\hat{f}}(\beta), \ \beta \in [c,d].$$

Заключаем, что общий вклад указанных слагаемых в величину предела в (1.20) равен:

$$-\frac{1}{2}T_{\hat{f}}(\beta) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\beta) & m_2(\beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & E \\ m_1(\beta) & m_2(\beta) \end{pmatrix} T_{\hat{f}}(\beta) = 0.$$

Теорема доказана.

1.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n

Интегральное представление меры Дирака (1.17) порождает прямое F_n и обратное F_n^{-1} преобразования типа Фурье на декартовой оси с n- точками деления по правилам:

$$F_n[f](\lambda) \equiv \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi,\lambda) f(\xi)\,d\xi + \sum_{m=1}^{n} (EO)\ \Omega_m^{-1}(l_m,\lambda) M_{m1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{matrix} \left(\gamma_{11}^m f_m^{/}(l_m) + \delta_{11}^m f_m(l_m)\right) - \left(\gamma_{12}^m f_{m+1}^{/}(l_k) + \delta_{12}^m f_{m+1}(l_k)\right) \\ \left(\gamma_{21}^m f_m^{/}(l_m) + \delta_{21}^m f_m(l_m)\right) - \left(\gamma_{22}^m f_{m+1}^{/}(l_k) + \delta_{22}^m f_{m+1}(l_k)\right) \end{matrix} \right), \quad (1.24)$$

$$F_n^{-1}\left[\hat{f}\right](x) \equiv f(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\varphi(x,\lambda)\hat{f}(\lambda)\,d\lambda. \qquad (1.25)$$

Приведем основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$B=\sum_{k=1}^{n}A_k^2\,\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\frac{d^2}{dx^2}\,+\theta\left(x-l_n\right)\,A_{n+1}^2\frac{d^2}{dx^2},$$

где

$$\theta\left(x-l_0\right)\equiv 1.$$

Теорема 1.5 *.Для трижды непрерывно- дифференцируемой на множестве I_n вектор- функции*

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,f_k\left(x\right)\,+\theta\left(x-l_n\right)\,f_{n+1}\left(x\right),$$

удовлетворяющей условиям на бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\,\left(\varphi_1^*\frac{d}{dx}f_1\left(x\right)-\frac{d}{dx}\varphi_1^*f_1\left(x\right)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\,\left(\varphi_{n+1}^*\frac{d}{dx}f_{n+1}\left(x\right)-\frac{d}{dx}\varphi_{n+1}^*f_{n+1}\left(x\right)\right)=0,$$

справедливо тождество:

$$F_n\left[B\left(f\right)\right]=-\lambda^2\,\hat{f}\left(\lambda\right)-\left(E0\right)\sum_{m=1}^{n}\Omega_m^{-1}\left(l_m,\lambda\right)\,M_{m1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{\left[\begin{pmatrix}\beta_{21}^m & \alpha_{21}^m\\ \beta_{22}^m & \alpha_{22}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{m+1}\left(l_m\right)\\ f_{m+1}^{/}\left(l_m\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{21}^m & \delta_{21}^m\\ \gamma_{22}^m & \delta_{22}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{m+1}^2f_{m+1}^{//}\left(l_m\right)\\ A_{m+1}^2f_{m+1}^{///}\left(l_m\right)\end{pmatrix}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\begin{pmatrix}\beta_{11}^m & \alpha_{11}^m\\ \beta_{12}^m & \alpha_{12}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_m\left(l_m\right)\\ f_m^{/}\left(l_m\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{11}^m & \delta_{11}^m\\ \gamma_{12}^m & \delta_{12}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_m^2f_m^{//}\left(l_m\right)\\ A_m^2f_m^{///}\left(l_m\right)\end{pmatrix}\right]\right\}. \tag{1.26}$$

здесь

$$B\left(f\right)=\sum_{k=2}^{n}\,\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)A_k^2\frac{d^2}{dx^2}f_k+$$
$$+\theta\left(l_1-x\right)A_1^2\frac{d^2}{dx^2}f_1+\theta\left(x-l_n\right)\,A_{n+1}^2\frac{d^2}{dx^2}f_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\left(A_j^{-2}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_j\left(t,x\right)=0,\ \ (t,x)\in D^+,\ j=\overline{1,n+1}$$

$$u_j\left(t,x\right)|_{t=0}=B_j(f_j)\left(x\right),\ \ x\in I_n$$

$$u_1|_{x=-\infty}=0\,,\ \ u_{n+1}|_{x=\infty}=0$$

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k+\gamma_{m1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta_{m1}^k+\delta_{m1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u_k=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^k+\gamma_{m2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta_{m2}^k+\delta_{m2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u_{k+1}.$$

Предположим для простоты, что вектор- функции

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,f_k\left(x\right)\,+\theta\left(x-l_n\right)\,f_{n+1}\left(x\right),$$

удовлетворяет условиям сопряжения вида

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k+\gamma_{m1}^kA_j^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^k+\delta_{m1}^kA_j^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\right]f_k=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^k+\gamma_{m2}^kA_j^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^k+\delta_{m2}^kA_j^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\right]f_{k+1}.$$

Учитывая, что вектор-функция $B(u)$ служит решением задачи Коши с начальными условиями

$$B\left(u\right)|_{t=0}=B\left(f\right),$$

из интегрального тождества (1.16) имеем:

$$B\left(u\right)=F_n^{-1}\left(e^{-\lambda^2t}\,F_n\left(B\left(f\right)\right)\right). \tag{1.27}$$

С другой стороны, в виду интегрального тождества (1.16), дифференцированием последнего по t получим равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}u=F_n^{-1}\left(e^{-\lambda^2t}\left(-\lambda^2\right)\,F_n\left(f\right)\right).$$

Замечая, что $\frac{\partial}{\partial t}\left(u\right)=B\left(u\right)$ найдем

$$B\left(u\right)=F_n^{-1}\left(e^{-\lambda^2t}\left(-\lambda^2\right)\,F_n\left(f\right)\right).$$

Сравнивая правые части обоих полученных равенств, в виду однозначности преобразования Фурье F_n , заключаем, что доказываемое тождество справедливо.

Глава 2

Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n+1)$-слойного полупространства

2.1 Прямая и двойственная задачи Штурма-Лиувилля для оператора Фурье в I_n^+

Рассмотрим прямую задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве

$$I_n^+ = \left\{ x : x \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} (l_{j-1}, l_j)\,,\ \ l_0 \geq 0,\ \ l_{n+1} = \infty,\ \ l_j < l_{j+1},\ \ j = 1, ..., n \right\}$$

нетривиального решения сепаратной матричной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q_m^2 \right) y_m = 0,\ \ q_m^2 = A_m^{-2} \cdot \lambda^2,\ \ m = \overline{1, n+1} \tag{2.1}$$

по краевым условиям

$$\left(\left(\alpha_{11}^0 + \lambda^2 \delta_{11}^0\right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{11}^0 + \lambda^2 \gamma_{11}^0\right) \right) y_1 \Big|_{x=l_0} = 0, \quad \|y_{n+1}\| \;|_{x=\infty} < \infty \tag{2.2}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\left(\left(\alpha_{j1}^k+\lambda^2\delta_{j1}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j1}^k+\lambda^2\gamma_{j1}^k\right)\right)y_k=$$
$$=\left(\left(\alpha_{j2}^k+\lambda^2\delta_{j2}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j2}^k+\lambda^2\gamma_{j2}^k\right)\right)y_{k+1} \tag{2.3}$$
$$x=l_k,\ \ k=\overline{1,n},\ \ j=1,2,$$

где

$$y_m\left(x,\lambda\right)=\begin{pmatrix} y_{1m}\left(x,\lambda\right)\\ \vdots \\ y_{rm}\left(x,\lambda\right)\end{pmatrix},$$
$$\|y_m\|=\sqrt{y_{1m}^2+...+y_{rm}^2}, m=\overline{1,n+1}.$$

Пусть при некотором λ, рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y\left(x,\lambda\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,y_k\left(x,\lambda\right)\,+\,\theta\left(x-l_n\right)\,y_{n+1}\left(x,\lambda\right).$$

В этом случае число λ называется собственным значением, а соответствующее решение $y\left(x,\lambda\right)$ - собственной вектор- функцией.

Здесь

$$\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0,\gamma_{11}^0,\delta_{11}^0,\alpha_{j1}^k,\beta_{j1}^k,\gamma_{j1}^k,\delta_{j1}^k,\alpha_{j2}^k,\beta_{j2}^k,\gamma_{j2}^k,\delta_{j2}^k,U_j,A_j-$$
$$(j=1,2;\ \ m=1,n+1;\ \ k=1,n)$$

матрицы размера $r{\times}r$; для матриц

$$M_{mk}\equiv\begin{pmatrix}\beta_{1m}^k+\lambda^2\gamma_{1m}^k & \alpha_{1m}^k+\lambda^2\delta_{1m}^k\\ \beta_{2m}^k+\lambda^2\gamma_{2m}^k & \alpha_{2m}^k+\lambda^2\delta_{2m}^k\end{pmatrix},\ \ m=1,2;\ \ k=\overline{1,n}$$

потребуем их невырожденность, т.е.

$$\det\ \ M_{mk}\equiv C_{mk}\left(\lambda\right)\neq 0,\ \ \lambda\in\left[0,\infty\right). \tag{2.4}$$

Матрицы $A_m,\ \ m=\overline{1,n+1}$ - положительно-определенные. Обозначим

$$\varphi_{n+1}\left(x\right)=e^{q_{n+1}x\cdot i};\ \ \psi_{n+1}\left(x\right)=e^{-q_{n+1}x\cdot i};\ \ q_{n+1}=A_{n+1}^{-1}\lambda.$$

Индукционными соотношениями определим остальные n пар матричнозначных функций $(\varphi_k,\psi_k)\,,\quad k=1,n$:

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k+\lambda^2\delta_{j1}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j1}^k+\lambda^2\gamma_{j1}^k\right)\right](\varphi_k,\psi_k)=$$

$$=\left[\left(\alpha_{j2}^k+\lambda^2\delta_{j2}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j2}^k+\lambda^2\gamma_{j2}^k\right)\right](\varphi_{k+1},\psi_{k+1})\,, \tag{2.5}$$

$$k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,2}.$$

Введем также обозначения

$$\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\lambda)=\left[\left(\alpha_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0\right)\right]\varphi_1\left(x,\lambda\right)\Big|_{x=l_0},$$

$$\overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\lambda)=\left[\left(\alpha_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0\right)\right]\psi_1\left(x,\lambda\right)\Big|_{x=l_0},$$

$$\Omega_k=\begin{pmatrix}\varphi_k & \psi_k\\ \varphi_k^{/} & \psi_k^{/}\end{pmatrix},\quad i=\overline{1,n+1}.$$

Лемма 2.1 *.Для всех $k=\overline{1,n+1}$ выполнены тождества:*

$$\left(\Omega_k^{-1}\left(x,\lambda\right)\right)^{/}=\begin{pmatrix}O & E\\ -q_k^2 & E\end{pmatrix}\Omega_k,\qquad \left(\Omega_k^{-1}\left(x,\lambda\right)\right)^{//}=-\Omega_k^{-1}\lambda^2A_k^{-2}.$$

Доказательство. Достаточно применить известную формулу [28] $\left(\Omega_k^{-1}\right)^{/}=-\Omega_k^{-1}\Omega_k^{/}\Omega_k^{-1}$,и воспользоваться непосредственно проверяемым тождеством:

$$(\Omega_k)^{/}=\begin{pmatrix}O & E\\ -q_k^2 & E\end{pmatrix}\Omega_k.$$

Лемма 2.2 *Если справедливо неравенство*

$$\det\begin{pmatrix}\beta_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0 & \alpha_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0\\ O & E\end{pmatrix}\neq 0,$$

то для всех значений спектрального параметра $\lambda\in[0,\infty)$ выполнены условия неограниченной разрешимости задачи

$$\det\ \overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\lambda)\neq 0,\quad \det\ \overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\lambda)\neq 0.$$

Доказательство. Учитывая, что матрицы $\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}$ и $\underset{1}{\overset{0}{\psi}}$ одновременно вырожденны или не вырожденны, из элементарного тождества

$$\left(\begin{array}{cc} \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} & \underset{1}{\overset{0}{\psi}} \\ \varphi_1^{/} & \psi_1^{/} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ll} \beta_{11}^0 + \lambda^2\gamma_{11}^0 & \alpha_{11}^0 + \lambda^2\delta_{11}^0 \\ 0 & E \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_1^{/} & \psi_1^{/} \end{array}\right)$$

следует невырожденность матриц $\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}, \underset{1}{\overset{0}{\psi}}$.

Теорема 2.1 *.Спектр задачи (2.1)-(2.3) непрерывен и заполняет всю полуось* $(0, \infty)$. *Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению* λ *соответствует ровно r линейно независимых собственных вектор - функций, в качестве последних можно взять r столбцов матричнозначной функции*

$$u(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \theta(x - l_{k-1})\, \theta(l_k - x)\, u_k(x,\lambda) \,+\, \theta(x - l_n)\, u_{n+1}(x,\lambda), \quad (2.6)$$

$$u_j(x,\lambda) = \varphi_j(x,\lambda) \overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}(\lambda) - \psi_j(x,\lambda) \overset{0}{\psi}{}_1^{-1}(\lambda),$$

т.е.

$$y^m(x,\lambda) = \left(\begin{array}{l} u_{1m}(x,\lambda) \\ \vdots \\ u_{rm}(x,\lambda) \end{array}\right).$$

Двойственная задача Штурма- Лиувилля, к задаче (2.1)-(2.3), состоит в нахождении нетривиального решения сепаратной матричной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2}{dx^2} y_m^* + y_m^* q_m^2 = 0, \quad m = \overline{1, n+1}, \tag{2.7}$$

по краевым условиям

$$\left(\frac{d}{dx} y_1^* \left(\beta_{11}^0 + \lambda^2\gamma_{11}^0\right)^{-1} + y_1^* \left(\alpha_{11}^0 + \lambda^2\delta_{11}^0\right)^{-1}\right)\Big|_{x=l_0} = 0, \;\; \left\|y_{n+1}^*\right\| < \infty, \tag{2.8}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов:

$$\left(-\frac{d}{dx}y_k^*, y_k^*\right)\left(\begin{array}{cc}\beta_{11}^k+\lambda^2\gamma_{11}^k & \alpha_{11}^k+\lambda^2\delta_{11}^k\\ \beta_{21}^k+\lambda^2\gamma_{21}^k & \alpha_{21}^k+\lambda^2\delta_{21}^k\end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\left(-\frac{d}{dx}y_{k+1}^*, y_{k+1}^*\right)\left(\begin{array}{cc}\beta_{12}^k+\lambda^2\gamma_{12}^k & \alpha_{12}^k+\lambda^2\delta_{12}^k\\ \beta_{22}^k+\lambda^2\gamma_{22}^k & \alpha_{22}^k+\lambda^2\delta_{22}^k\end{array}\right)^{-1}, \quad x=l_k, \quad k=\overline{1,n}. \tag{2.9}$$

Решение рассматриваемой краевой задачи будем записывать в виде

$$y^*(\xi,\lambda)=\sum_{k=2}^{n}\theta(\xi-l_{k-1})\,\theta(l_k-\xi)\,y_k^*(\xi,\lambda)+\theta(\xi-l_n)\,y_{n+1}^*(\xi,\lambda),$$

$$y_m^*(\xi,\lambda)=\left(\begin{array}{ccc}y_{m1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & y_{mr}^*(\xi,\lambda)\end{array}\right),$$

$$\|y_m^*\|=\sqrt{(y_{1m}^*)^2+...+(y_{rm}^*)^2}, m=\overline{1,n+1}.$$

Теорема 2.2 .*Спектр задачи (2.7)-(2.9) непрерывен и заполняет всю полуось* $(0,\infty)$. *Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению* λ *соответствует ровно r линейно независимых собственных строк- функций, в качестве последних можно взять r строк матричнозначной функции*

$$u^*(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\,u_k^*(x,\lambda)\,+\,\theta(x-l_n)\,u_{n+1}^*(x,\lambda),$$

$$u_j^*(x,\beta)=\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\beta),\overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\beta)\right)\Omega_j^{-1}(x,\beta)\left(\begin{array}{c}O\\ E\end{array}\right)A_j^{-2},$$

т.е.

$$y^{*j}(\xi,\lambda)=\left(\begin{array}{ccc}u_{j1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & u_{jr}^*(\xi,\lambda)\end{array}\right), j=\overline{1,r}.$$

Наличие интегральной функции $u(x,\lambda)$ и сопряженной спектральной функции $u^*(x,\beta)$ позволяет написать на множестве I_n^+ интегральное представление меры Дирака

$$\delta(x-\xi)E=-\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\lambda u(x,\lambda)\left(u^*(\xi,\lambda)+\left(\gamma_{11}^0\delta_+(\xi-l_0)+\right.\right. \tag{2.10}$$

$$+\delta_{11}^{0}\delta_{+}^{/}\left(\xi-l_0\right)\Big)+\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\left(\lambda\right),\underset{1}{\overset{0}{\psi}}\left(\lambda\right)\right)\Omega_k^{-1}\left(l_k,\lambda\right)M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^{k}&\delta_{21}^{k}\\\gamma_{22}^{k}&\delta_{22}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\delta_{+}\left(\xi-l_k\right)\\\delta_{+}^{/}\left(\xi-l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^{k}&\delta_{11}^{k}\\\gamma_{12}^{k}&\delta_{12}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\delta_{-}\left(\xi-l_k\right)\\\delta_{-}^{/}\left(\xi-l_k\right)\end{array}\right)\right\}\Bigg)d\lambda,$$

где

$$\delta_{+}\left(x\right)=\frac{dS_{+}\left(x\right)}{dx},\quad\delta_{-}\left(x\right)=\frac{dS_{-}\left(x\right)}{dx},$$

$S_{+}\left(x\right),\quad S_{-}\left(x\right)$ −асимметрические единичные функции, E- единичная матрица.

2.2 Теоремы разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n^{+}

Теорема 2.3 .*Пусть вектор-функция $f(x)$ определена на I_n^{+}, кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию. Тогда для каждого $x\in I_n^{+}$ справедлива формула разложения*

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x-0\right)+f\left(x+0\right)\right)=-\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty}u\left(x,\lambda\right)\Bigg(\int_{l_0}^{\infty}u^{*}\left(\xi,\lambda\right)f\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\left(\gamma_{11}^{0}f_1\left(l_0\right)+\delta_{11}^{0}f_1^{/}\left(l_0\right)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\left(\lambda\right),\underset{1}{\overset{0}{\psi}}\left(\lambda\right)\right)\ \Omega_k^{-1}\left(l_k,\lambda\right)\ M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^{k}&\delta_{21}^{k}\\\gamma_{22}^{k}&\delta_{22}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_{k+1}\left(l_k\right)\\f_{k+1}^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^{k}&\delta_{11}^{k}\\\gamma_{12}^{k}&\delta_{12}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_k\left(l_k\right)\\f_k^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)\right\}\Bigg)\lambda d\lambda. \quad (2.11)$$

Доказательство. Образуем векторнозначную функцию

$$u_j\left(p,x\right)=\sum_{m=0}^{n}\int_{l_m}^{l_{m+1}}H_{j,m+1}^{*}\left(p,x,\xi\right)\left(\begin{array}{c}0\\\mathrm{E}\end{array}\right)A_{m+1}^{-2}f_{m+1}\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+H_{j,1}^{*}\left(p,x,l_0\right)\left(\begin{array}{c}0\\\mathrm{E}\end{array}\right)\left(\beta_{11}^{0}+p\gamma_{11}^{0}\right)^{-1}R_0+\sum_{m=1}^{n}H_{\ j,m}^{\,*}\left(p,x,l_m\right)R_m, \quad (2.12)$$

где приняты обозначения

$$R_s = M_{s1}^{-1} \left(\begin{array}{c} g_{s1} \\ g_{s2} \end{array} \right), \;\; s = \overline{1,n}, \quad R_0 = \delta_{11}^0 \, f_1^{/} \left(l_0 \right) + \gamma_{11}^0 \, f_1 \left(l_0 \right),$$

$$g_{sm} = \delta_{m1}^s \, f_s^{/} \left(l_s \right) + \gamma_{m1}^s \, f_s \left(l_s \right) - \left(\delta_{m2}^s \, f_{s+1}^{/} \left(l_s \right) + \gamma_{m2}^s \, f_{s+1} \left(l_s \right) \right),$$

$H_{j,s}^*$ – образы Лапласа матричнозначных функций влияния, для которых справедливы формулы:

при $k < s$

$$H_{k,s}^* = \varphi_k \left(x \right) \, \left(EO \right) \, \Omega_s^{-1} \left(\xi \right) \, - \psi_k \left(x \right) \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} \left(EO \right) \, \Omega_s^{-1} \left(\xi \right) \, ,$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s,$$

при $k > s$

$$H_{k,s}^* = \psi_k \left(x \right) \left\{ - \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} \left(E0 \right) \, \Omega_s^{-1} \left(\xi \right) \, - \left(0E \right) \, \Omega_s^{-1} \left(\xi \right) \right\},$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s,$$

при $k = s$

$$H_{k,s}^* = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k \left(x \right) \, \left(EO \right) \, \Omega_k^{-1} \left(\xi \right) \, - \psi_k \left(x \right) \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \overset{0}{\varphi}{}_1^{-1} \left(EO \right) \, \Omega_k^{-1} \left(\xi \right) \, , \\ l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ \psi_k \left(x \right) \left\{ - \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} \left(EO \right) \, \Omega_k^{-1} \left(\xi \right) \, - \left(OE \right) \, \Omega_k^{-1} \left(\xi \right) \right\}, \\ l_{k-1} < \xi < x < l_k, \quad k = \overline{1, n+1}. \end{array} \right.$$

Функции $u_j^* \left(p, x \right)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи.

Запишем формулу обращения для преобразования Лапласа:

$$u_j \left(t, x \right) = \lim_{N \to \infty} \int\limits_{\sigma_0 - iN}^{\sigma_0 + iN} e^{pt} \left(\sum_{m=0}^{n} \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} H_{j,m+1}^* \left(p, x, \xi \right) \, \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathrm{E} \end{array} \right) A_{m+1}^{-2} \, f_{m+1} \left(\xi \right) d\xi + \right.$$
$$\left. + H_{j,1}^* \left(p, x, l_0 \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathrm{E} \end{array} \right) \left(\beta_{11}^0 + p \gamma_{11}^0 \right)^{-1} R_0 + \sum_{m=1}^{n} H_{\,j,m}^{\,*} \left(p, x, l_m \right) R_m \right), \tag{2.13}$$

где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, а N - достаточно большое число.

Заменим контур интегрирования $\{p: \ p=\sigma_0+it, \ \ -N\le t\le N\}$ на полудугу C_N радиуса $R^2=N^2+\sigma_0^2$ с центром в начале координат. Получим асимптотику для функций влияния $H^*_{j,m+1}$ на дуге C_N:

а) случай $j=m{+}1$.

Из условий сопряжения (2.3) для матричнозначных функций φ_{m+1}, ψ_{m+1}, Ω_{m+1} имеем асимптотику с известными функциями a_{m+1}, b_{m+1}, вид которых нам не потребуется:

$$\varphi_{m+1}\left(x,q_{m+1}\right) \ \sim \ e^{q_{m+1}x}a_{m+1}\left(\sqrt{p}\right),$$

$$\varphi^{/}_{m+1}\left(x,q_{m+1}\right) \ \sim \ q_{m+1}e^{q_{m+1}x}a_{m+1}\left(\sqrt{p}\right),$$

$$\Omega^{-1}_{m+1}\left(x,q_{m+1}\right) \ \sim \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^{-1}_{m+1} & 0\\ 0 & b^{-1}_{m+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-q_{m+1}x} & q^{-1}_{m+1}e^{-q_{m+1}x}\\ e^{q_{m+1}x} & -q^{-1}_{m+1}e^{q_{m+1}x}\end{pmatrix};$$

при этом в плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси выполнены условия

$$\det \ a_{m+1}\left(\sqrt{p}\right)\neq 0, \quad \det \ b_{m+1}\left(\sqrt{p}\right)\neq 0.$$

Таким образом, для изображения функции влияния $H^*_{m+1,m+1}$ получим асимптотику:

$$H^*_{m+1,m+1}\left(p,x,\xi\right) \ \sim \ \begin{cases} \frac{1}{2}e^{q_{m+1}x}\,a_{m+1}\,a^{-1}_{m+1}\,q^{-1}_{m+1}\,e^{-q_{m+1}\xi}, & l_m<x<\xi<l_{m+1},\\ \frac{1}{2}e^{-q_{m+1}x}\,b_{m+1}\,b^{-1}_{m+1}\,q^{-1}_{m+1}\,e^{q_{m+1}\xi}, & l_m<\xi<x<l_{m+1}\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{q_{m+1}(x-\xi)}\cdot q^{-1}_{m+1}, & l_m<x<\xi<l_{m+1},\\ \frac{1}{2}e^{-q_{m+1}(x-\xi)}\cdot q^{-1}_{m+1}, & l_m<\xi<x<l_{m+1}\end{cases} \quad\equiv\quad \tilde{H}_{m+1,m+1}\left(p,x,\xi\right).$$

Тогда найдем:

$$\lim_{N\to\infty}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iN}^{\sigma_0+iN} e^{pt}\cdot H^*_{m+1,m+1}\left(p,x,\xi\right)dp=\lim_{N\to\infty}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N} e^{pt}\ H^*_{m+1,m+1}\left(p,x,\xi\right)dp$$

$$=\lim_{N\to\infty}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N} e^{pt}\ \tilde{H}_{m+1,m+1}\left(p,x,\xi\right)dp=$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - iN}^{\sigma_0 + iN} e^{pt}\, \tilde{H}_{m+1,m+1}(p,x,\xi)\, dp. \qquad (2.14)$$

Применив лемму Дирихле [65], теорему Коши [29] и формулу разложения для классического преобразования Фурье [60], для интеграла в правой части формулы (2.14) будем иметь:

$$\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\, i2\lambda d\lambda \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} e^{A_{m+1}^{-1}\, x\lambda i} \frac{A_{m+1}}{\lambda} e^{-A_{m+1}^{-1}\, \xi\lambda i} A_{m+1}^{-2}\, f_{m+1}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\, i2d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{A_{m+1}^{-1}\, x\lambda i} e^{-A_{m+1}^{-1}\, \xi\lambda i} A_{m+1}^{-1}\, \tilde{f}_{m+1}(\xi)\, d\xi,$$

где

$$\tilde{f}_{m+1}(\xi) = \begin{cases} f_{m+1}(\xi), & \xi \in [l_m, l_{m+1}] \\ 0, & \xi \notin [l_m, l_{m+1}]. \end{cases}$$

Считая, для сокращения записей, все собственные числа матрицы A_{m+1} простыми, по формуле Фурье для всего пространства R [60] находим, что для вектор- функции $f(\xi)$, удовлетворяющей условию теоремы справедливо представление

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{A_{m+1}^{-1}\, x\lambda i} e^{-A_{m+1}^{-1}\, \xi\lambda i} A_{m+1}^{-1}\, \hat{f}_{m+1}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \tilde{f}_{m+1}(x) = f_{m+1}(x), \quad x \in (l_m, l_{m+1}), \quad m = \overline{0,n}.$$

Внеинтегральные члены в представлении (2.13) имеют своим пределом нуль. Таким образом,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} e^{pt}\, H^{*}_{m+1,m+1}(p,x,\xi)\, dp A_{m+1}^{-2}\, f_{m+1}(\xi)\, d\xi = f_{m+1}(x).$$

$$l_m < x < l_{m+1}$$

Абсолютная сходимость интегралов $\int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} f_{m+1}(\xi)\, d\xi$ при $m = \overline{0,n}$ гарантирует равномерную сходимость внутреннего интеграла в формуле (2.14), что в свою очередь позволяет перенести предел под знак интеграла.

Докажем, что все остальные интегралы в формуле (2.13) имеют пределом 0. Для этого воспользуемся описанным выше методом. Для изображений функций влияния при $1 \leq j < m+1$ имеем асимптотику:

$$H^*_{j,m+1}(p,x,\xi) \;\;\sim\;\; \frac{1}{2}e^{q_j(x-l_j)}q_j^{-1}e^{-q_j(\xi-l_m)} \equiv \tilde{H}_{j,m+1};$$

$$l_{j-1} < x < l_j, \quad l_m < \xi < l_{m+1}.$$

Аналогично, при $j > m+1$:

$$H^*_{j,m+1}(p,x,\xi) \;\;\sim\;\; \frac{1}{2}e^{-q_j(x-l_j)}q_j^{-1}e^{q_{m+1}(\xi-l_m)} \equiv \tilde{H}_{j,m+1};$$

$$l_{j-1} < x < l_j, \quad l_m < \xi < l_{m+1}.$$

В случае $j < m+1$ имеем:

$$\lim_{N\to\infty} \;\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iN}^{\sigma_0+iN} e^{pt}\, H^*_{j,m+1}(p,x,\xi)\,dp = \lim_{N\to\infty}\;\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iN}^{\sigma_0+iN} e^{pt}\,\tilde{H}_{j,m+1}(p,x,\xi)\,dp.$$

По лемме Дирихле и теореме Коши [29] для соответствующего слагаемого в правой части формулы (2.13) получим:

$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 t} i\frac{2}{\lambda}\lambda d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{A_j^{-1}(x-l_j)\,\lambda i}A_j e^{-A_{m+1}^{-1}(\xi-l_m)\,\lambda i}A_{m+1}^{-2}\,\hat{f}_{m+1}(\xi)\,d\xi.$$

Для сокращения письма считаем все собственные числа матриц A_j, A_{m+1} простыми. Применим формулы Фурье для всего пространства [60] к элементу

$$e^{a_{k,j}^{-1}(x-l_j)\,\lambda i}e^{-a_{i,m+1}^{-1}(\xi-l_m)\,\lambda i}\hat{f}_q(\xi)\,,$$

матрицы

$$e^{A_j^{-1}(x-l_j)\,\lambda i}A_j e^{-A_{m+1}^{-1}(\xi-l_m)\,\lambda i}A_{m+1}^{-2}\,\hat{f}_{m+1}(\xi)\,,$$

где $a_{k,j}$ – k-е собственное число матрицы A_j,

$a_{i,m+1}$ – i-е собственное число матрицы A_{m+1};

$\hat{f}_q(\xi)\,, q$ – компонента вектора $\hat{f}(\xi)\,,\;\; k=\overline{1,r},\;\; i=\overline{1,r},\;\; q=\overline{1,r}.$

В силу определения функции $\hat{f}_q(\xi)$,имеем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 t}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a_{k,j}^{-1}(x-l_j)\,\lambda}e^{-a_{i,m+1}^{-1}(\xi-l_m)\,\lambda i}\hat{f}_q(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$x \in (l_{j-1}, l_j)\,, j = \overline{1, m+1}\,.$$

Последнее равенство позволяет заключить, что для $x \in (l_{j-1}, l_j)$, $\xi \in (l_m, l_{m+1})$ соответствующий предел в представлении (2.13) равен нулю:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} e^{pt}\, H^*_{j,m+1}(p, x, \xi)\, dp A^{-2}_{m+1}\, f_{m+1}(\xi)\, d\xi = 0 \quad .$$

Равномерная сходимость внутреннего интеграла гарантирована в виду абсолютной сходимости $\int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} f_{m+1}(\xi)\, d\xi$ при $m = \overline{1, n}$.

Таким образом, в формуле (2.13) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Вновь применив лемму Дирихле [65], теорему Коши [29] делаем вывод о равенстве:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{\infty} u(x, \lambda) \left(\int\limits_{l_0}^{\infty} u^*(\xi, \lambda) \cdot f(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$+ \left(\gamma^0_{11} f_1(l_0) + \delta^0_{11} f_1^{/}(l_0) \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}(\lambda)\,, \underset{1}{\overset{0}{\psi}}(\lambda) \right) \Omega_k^{-1}(l_k, \lambda)\ M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot$$

$$\left. \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \gamma^k_{21} & \delta^k_{21} \\ \gamma^k_{22} & \delta^k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1}(l_k) \\ f^{/}_{k+1}(l_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma^k_{11} & \delta^k_{11} \\ \gamma^k_{12} & \delta^k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k(l_k) \\ f^{/}_k(l_k) \end{pmatrix} \right\} \right) \lambda d\lambda.$$

Теорема доказана.

Приведем формулировку теоремы разложения в терминах спектральной функции.

Теорема 2.4 *.Пусть вектор- функция $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ определена на множестве $[0, \infty)$, кусочно- непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию на $[0, \infty)$. Тогда для $\lambda \in [0, \infty)$ справедливо интегральное представление:*

$$\frac{1}{2} \left[\hat{f}(\beta - 0) + \hat{f}(\beta + 0) \right] = -\frac{1}{\pi i} \left(\lim_{N \to \infty} \int\limits_{l_0}^{N} u^*(x, \beta)\, f(x)\, dx + \right.$$

$$+\left(\gamma_{11}^{0} f_1\left(l_0\right)+\delta_{11}^{0} f_1^{/}\left(l_0\right)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}(\beta), \underset{1}{\overset{0}{\psi}}(\beta)\right) \Omega_k^{-1}\left(l_k, \beta\right) M_{k1}^{-1}(\beta) \cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^{k} & \delta_{21}^{k} \\ \gamma_{22}^{k} & \delta_{22}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_{k+1}\left(l_k\right) \\ f_{k+1}^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^{k} & \delta_{11}^{k} \\ \gamma_{12}^{k} & \delta_{12}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_k\left(l_k\right) \\ f_k^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)\right\}\Bigg), \qquad (2.15)$$

$$f(x)=\int_0^{\infty} u(x, \lambda) \hat{f}(\lambda) \lambda d \lambda \qquad (2.16)$$

Доказательство. Из леммы 2.1 следуют два тождества:

$$\frac{1}{\lambda^2-\beta^2} \cdot\left\{u_1^*\left(l_0, \lambda\right) \frac{d}{d x} u_1\left(l_0, \beta\right)-\frac{d}{d x} u_1^*\left(l_0, \lambda\right) u_1\left(l_0, \beta\right)\right\}=$$

$$=\gamma_{11}^{0} u_1\left(l_0, \beta\right)+\delta_{11}^{0} u_1^{/}\left(l_0, \beta\right),$$

$$u_k^*(x, \lambda) \tfrac{d}{d x} u_k(x, \beta)-\tfrac{d}{d x} u_k^*(x, \lambda)\, u_k(x, \beta)=$$

$$=\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}(\lambda), \underset{1}{\overset{0}{\psi}}(\lambda)\right) \Omega_k^{-1}(x, \lambda)\left(\begin{array}{c}u_k(x, \beta) \\ u_k^{/}(x, \beta)\end{array}\right). \qquad (2.17)$$

Таким образом, получаем равенство:

$$\int_{l_0}^{N} u^* u d x+\left(\gamma_{11}^{0} u_1\left(l_0, \beta\right)+\delta_{11}^{0} u_1^{/}\left(l_0, \beta\right)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\psi}_1\right) \Omega_k^{-1}(\lambda) M_{k1}^{-1}(\lambda) \cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^{k} & \delta_{21}^{k} \\ \gamma_{22}^{k} & \delta_{22}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}u_{k+1}\left(l_k, \beta\right) \\ u_{k+1}^{/}\left(l_k, \beta\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^{k} & \delta_{11}^{k} \\ \gamma_{12}^{k} & \delta_{12}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}u_k\left(l_k, \beta\right) \\ u_k^{/}\left(l_k, \beta\right)\end{array}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\left(\overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\psi}_1\right) \Omega_{n+1}^{-1}(N, \lambda)\left(\begin{array}{c}u_{n+1}(N, \beta) \\ u_{n+1}^{/}(N, \beta)\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\left(\overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\psi}_1\right) \Omega_{n+1}^{-1}(N, \lambda)\, \Omega_{n+1}(N, \beta)\left(\begin{array}{c}\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}(\beta)^{-1} \\ -\underset{1}{\overset{0}{\psi}}(\beta)^{-1}\end{array}\right). \qquad (2.18)$$

Для произвольных положительных чисел c, d и произвольной ограниченной суммируемой на $[c, d]$ вектор- функции $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ найдем значение выражения

$$\frac{1}{\pi i} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{c}^{d} \lambda \left(\int\limits_{l_0}^{N} u^{*}\left(x, \lambda\right)\, u\left(x, \beta\right) dx + \left(\gamma_{11}^{0} u_1\left(l_0, \beta\right) + \delta_{11}^{0} u_1^{/}\left(l_0, \beta\right) \right) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\overset{0}{\varphi}_1, \overset{0}{\psi}_1 \right) \Omega_k^{-1}\left(\lambda\right)\, M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_{21}^{k} & \delta_{21}^{k} \\ \gamma_{22}^{k} & \delta_{22}^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1}\left(\beta\right) \\ u_{k+1}^{/}\left(\beta\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{k} & \delta_{11}^{k} \\ \gamma_{12}^{k} & \delta_{12}^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k}\left(\beta\right) \\ u_{k}^{/}\left(\beta\right) \end{pmatrix} \right\} \right) \hat{f}\left(\lambda\right) d\lambda.$$

Если вектор- функция $\hat{f}\left(\lambda\right)$ непрерывна, ограниченной вариации, абсолютно интегрируема на $[c, d]$, то ввиду (2.18) вычисляемый предел будет равен:

$$\begin{cases} \hat{f}\left(\beta\right), & \beta \in \left[c, d\right], \\ 0, & \beta \notin \left[c, d\right]. \end{cases}$$

Если же вектор- функция $\hat{f} = \hat{f}(\lambda)$ обладает указанными выше свойствами на всей полуоси $[0,\infty)$, то:

$$\frac{1}{2} \left[\hat{f}\left(\beta - 0\right) + \hat{f}\left(\beta + 0\right) \right] = -\frac{1}{\pi i} \left(\lim_{N\to\infty} \int\limits_{l_0}^{N} u^{*}\left(x, \beta\right) f\left(x\right) dx + \right.$$

$$+ \left(\gamma_{11}^{0} f_1\left(l_0\right) + \delta_{11}^{0} f_1^{/}\left(l_0\right) \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\left(\beta\right), \underset{1}{\overset{0}{\psi}}\left(\beta\right) \right) \Omega_k^{-1}\left(l_k, \beta\right)\, M_{k1}^{-1}\left(\beta\right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_{21}^{k} & \delta_{21}^{k} \\ \gamma_{22}^{k} & \delta_{22}^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1}\left(l_k\right) \\ f_{k+1}^{/}\left(l_k\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{k} & \delta_{11}^{k} \\ \gamma_{12}^{k} & \delta_{12}^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k}\left(l_k\right) \\ f_{k}^{/}\left(l_k\right) \end{pmatrix} \right\} \right). \tag{2.19}$$

Доказательство теоремы завершено.

2.3 Прямое F_{n+} и обратное F_{n+}^{-1} матричные интегральные преобразования Фурье на действительной полуоси с n точками сопряжения

Установленные теоремы разложения позволяют ввести прямое F_{n+} и обратное F_{n+}^{-1} матричные интегральные преобразования Фурье на действительной полуоси с n точками сопряжения:

$$F_{n+}\left[f\right]\,(\lambda)=\int\limits_{l_0}^{\infty}u^*\left(\xi,\lambda\right)f\left(\xi\right)d\xi+\left(\gamma_{11}^{0}f_1\left(l_0\right)+\delta_{11}^{0}f_1^{/}\left(l_0\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}\left(\lambda\right),\overset{0}{\underset{1}{\psi}}\left(\lambda\right)\right)\,\Omega_k^{-1}\left(l_k,\lambda\right)\,M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^{k}&\delta_{21}^{k}\\\gamma_{22}^{k}&\delta_{22}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_{k+1}\left(l_k\right)\\f_{k+1}^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^{k}&\delta_{11}^{k}\\\gamma_{12}^{k}&\delta_{12}^{k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_k\left(l_k\right)\\f_k^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)\right\}\equiv\hat{f}\left(\lambda\right),\tag{2.20}$$

$$F_{n+}^{-1}\left[\hat{f}\right]\,(x)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda u\left(x,\lambda\right)\,\hat{f}\left(\lambda\right)d\lambda\equiv f\left(x\right),\tag{2.21}$$

где

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(l_k-x\right)\,\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,f_k\left(x\right)\,+\theta\left(x-l_n\right)\,f_{n+1}\left(x\right).$$

2.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n^+

Теорема 2.5 .*Если вектор- функция*

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)f_k\left(x\right)\,+\theta\left(x-l_n\right)\,f_{n+1}\left(x\right),$$

трижды непрерывно дифференцируемая на множестве I_n^+, обладающая вместе со своими производными до третьего порядка включительно предельными значениями

$$f_k^{(m)}(l_{k-1}) = \lim_{x\to l_{k-1}+0} f_k^{(m)}(x), \ \ m=0,1,2,3; \quad k=\overline{1,n+1}$$

удовлетворяет краевому условию на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty}\left(u^*(x,\lambda)\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}u^*(x,\lambda)\ f(x)\right) = 0$$

то имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора B:

$$F_{n+}[B(f)](\lambda) = -\lambda^2\hat{f}(\lambda) - \left\{\left(\beta_{11}^0 f_1(l_0) + \alpha_{11}^0 f_1^{/}(l_0)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\gamma_{11}^0 A_1^2 f_1^{//}(l_0) + \delta_{11}^0 A_1^2 f_1^{///}(l_0)\right)\right\} - \sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}, \overset{0}{\underset{1}{\psi}}\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\ M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\left(\begin{array}{cc}\beta_{21}^k & \alpha_{21}^k\\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_{k+1}(l_k)\\ f_{k+1}^{/}(l_k)\end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}A_{k+1}^2 f_{k+1}^{//}(l_k)\\ A_{k+1}^2 f_{k+1}^{///}(l_k)\end{array}\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\left(\begin{array}{cc}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k\\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_k(l_k)\\ f_k^{/}(l_k)\end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}A_k^2 f_k^{//}(l_k)\\ A_k^2 f_k^{///}(l_k)\end{array}\right)\right)\right\}. \tag{2.22}$$

где

$$B = \sum_{j=1}^{n} A_j^2\theta(x-l_{j-1})\ \theta(l_j - x)\frac{d^2}{dx^2} + \theta(x-l_n)\frac{d^2}{dx^2}A_{n+1}^2.$$

Доказательство. Для $F_{n+}[B(f)](\lambda)$ имеем:

$$F_{n+}[B(f)](\lambda) = \int_{l_0}^{\infty} u^*(\xi,\lambda) A^2 f^{//}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\left(\gamma_{11}^0 A_1^2 f_1^{//}(l_0) + \delta_{11}^0 A_1^2 f_1^{///}(l_0)\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\lambda), \overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\lambda)\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\ M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k^2 f_k^{//}(l_k)\\ A_k^2 f_k^{///}(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k+1}^2 f_{k+1}^{//}(l_k)\\ A_{k+1}^2 f_{k+1}^{///}(l_k)\end{pmatrix}\right\}.$$

Вычисляя почленным интегрированием выражение в правой части, для $F_{n+}[B(f)](\lambda)$ будем иметь:

$$F_{n+}[B(f)](\lambda)=-\lambda^2\int\limits_{l_0}^{\infty}u^*(\xi,\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda-$$

$$-\left[\left(\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\lambda^2\right)f_1(l_0)+\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\lambda^2\right)f_1^{/}(l_0)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}},\underset{1}{\overset{0}{\psi}}\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\;M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left(M_{k1}\begin{pmatrix}f_k(l_k)\\ f_k^{/}(l_k)\end{pmatrix}-M_{k2}\begin{pmatrix}f_{k+1}(l_k)\\ f_{k+1}^{/}(l_k)\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\left(\gamma_{11}^0A_1^2f_1^{//}(l_0)+\delta_{11}^0A_1^2f_1^{///}(l_0)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}(\lambda),\underset{1}{\overset{0}{\psi}}(\lambda)\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k^2 f_k^{//}(l_k)\\ A_k^2 f_k^{///}(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k+1}^2 f_{k+1}^{//}(l_k)\\ A_{k+1}^2 f_{k+1}^{///}(l_k)\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=-\lambda^2F_{n+}(f)(\lambda)-\left\{\left(\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\lambda^2\right)f_1(l_0)+\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\lambda^2\right)f_1^{/}(l_0)\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{1}{\overset{0}{\varphi}},\underset{1}{\overset{0}{\psi}}\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\;M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\begin{pmatrix}\beta_{21}^k & \alpha_{21}^k\\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}(l_k)\\ f_{k+1}^{/}(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k+1}^2 f_{k+1}^{//}(l_k)\\ A_{k+1}^2 f_{k+1}^{///}(l_k)\end{pmatrix}\right.\right.-$$

$$\left.\left.-\left(\begin{pmatrix}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k\\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k(l_k)\\ f_k^{/}(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k^2 f_k^{//}(l_k)\\ A_k^2 f_k^{///}(l_k)\end{pmatrix}\right)\right)\right\}.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Матричные интегральные преобразования Фурье для $(n+1)$-слойного сегмента

3.1 Смешанная задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного в области

$$D^{+} = (0, \infty) \times I_n, \;\; I_n = \left\{ x: \; x \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}, l_j), \;\; l_0 \geq 0, \;\; l_{n+1} = l < \infty \right\}$$

решения сепаратной матричной системы классических уравнений теплопроводности

$$\left(A_j^{-2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_j = 0, \;\; (t, x) \in D_j^{+}, \tag{3.1}$$

$$j = \overline{1, n+1}, \;\; D_j^{+} = (0, \infty) \times I_n,$$

по начальным условиям

$$u_j\,(t, x)\,\big|_{t=0} = f_j\,(x)\,, \;\; x \in I_n, \;\; j = \overline{1, n+1}, \tag{3.2}$$

по краевым условиям

$$\left(\left(\alpha_{11}^{0} + \delta_{11}^{0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\beta_{11}^{0} + \gamma_{11}^{0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) u_1 \bigg|_{x=l_0} = 0,$$

$$\left(\left(\alpha_{22}^{n+1}+\delta_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta_{22}^{n+1}+\gamma_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)u_{n+1}\bigg|_{x=l}=0, \tag{3.3}$$

и по условиям сопряжения

$$\left(\left(\alpha_{m1}^{k}+\delta_{m1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta_{m1}^{k}+\gamma_{m1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)u_{k}=$$

$$\left(\left(\alpha_{m2}^{k}+\delta_{m2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\beta_{m2}^{k}+\gamma_{m2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)u_{k+1}, \tag{3.4}$$

$$x=l_k,\ \ k=\overline{1,n};\ \ m=1,\,2$$

где u_j, g_j - вектор- функции размера $r\times 1$, матрица A_j - положительно-определенная [28] размера $r\times r$;

$$\alpha_{11}^0,\ \beta_{11}^0,\ \delta_{11}^0,\ \gamma_{11}^0,\ \alpha_{22}^{n+1},\ \beta_{22}^{n+1},\ \delta_{22}^{n+1},\ \gamma_{22}^{n+1},\ \alpha_{mi}^k,\ \beta_{mi}^k,\ \delta_{mi}^k,\ \gamma_{mi}^k\quad -$$

данные матрицы размера $r\times r$.

В образах Лапласа вместо задачи (3.1)-(3.4) имеем задачу построения ограниченного на множестве I_n решения сепаратной матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2u_j^*}{dx^2}-q_j\cdot u_j^*=\bar{f}_j;\ \ x\in I_n, \tag{3.5}$$

$$j=\overline{1,n+1},\quad \bar{f}_j=A_j^{-2}f_j;\ \ q_j=A_j^{-2}\sqrt{p},$$

по граничным условиям

$$\left(\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0p\right)\right)u_1\bigg|_{x=l_0}=\delta_{11}^0f_1^{/}\left(l_0\right)+\gamma_{11}^0f_1\left(l_0\right), \tag{3.6}$$

$$\left(\left(\alpha_{22}^{n+1}+\delta_{22}^{n+1}p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{22}^{n+1}+\gamma_{22}^{n+1}p\right)\right)u_{n+1}\bigg|_{x=l_{n+1}}=$$

$$=\delta_{22}^{n+1}\,f_{n+1}^{/}\left(l\right)+\gamma_{22}^{n+1}\,f_{n+1}\left(l\right),$$

и по условиям сопряжения

$$\left(\left(\alpha_{m1}^{k}+\delta_{m1}^{k}p\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^{k}+\gamma_{m1}^{k}p\right)\right)u_{k}=$$

$$= \left(\left(\alpha_{m2}^k + \delta_{m2}^k p\right) \frac{d}{dx} + \left(\beta_{m2}^k + \gamma_{m2}^k p\right) \right) u_{k+1} +$$

$$+ \left(\delta_{m1}^k f_k^{/}(x) + \gamma_{m1}^k f_k(x) - \delta_{m2}^k f_{k+1}^{/}(x) - \gamma_{m2}^k f_{k+1}(x) \right), \qquad (3.7)$$

$$x = l_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = 1, 2.$$

Примем обозначение:

$$M_{km} = \begin{pmatrix} \beta_{1m}^k + p\gamma_{1m}^k & \alpha_{1m}^k + p\delta_{1m}^k \\ \beta_{2m}^k + p\gamma_{2m}^k & \alpha_{2m}^k + p\delta_{2m}^k \end{pmatrix}.$$

Всюду в этом параграфе будем требовать выполнения условий:

$$\det \quad M_{k1} \neq 0, \quad \det \quad M_{k2} \neq 0, \quad k = \overline{1, n+1}, \qquad (3.8)$$

для $p = \sigma + i\tau; Rep = \sigma \geq \sigma_0$, где

σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа,

и $Jmp = \tau \in (-\infty, +\infty)$.

Зададим вектор- функцию $\varphi_1(x)$ равенством:

$$\varphi_1(x) = C_1(x,p) \left(\beta_{11}^0\right)^{-1} - S_1(x,p) \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1},$$

в котором матричнозначные функции C_1, S_1 определены условиями:

$$S_1(l_0,p) = 0, \quad S_1^{/}(l_0,p) = E; C_1(l_0,p) = E, \quad C_1^{/}(l_0,p) = 0 \quad .$$

Вектор- функции $\varphi_2(x), ..., \varphi_{n+1}(x)$ - определим по индукции соотношениями сопряжения (3.7) в которых положено $f = 0$.

Аналогично, зададим вектор-функцию $\psi_{n+1}(x)$ равенством:

$$\psi_{n+1} = C_{n+1}(x,p) \left(\beta_{22}^{n+1}\right)^{-1} - S_{n+1}(x,p) \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1},$$

в котором матричнозначные функции C_{n+1}, S_{n+1} определены условиями:

$$S_{n+1}(l,p) = 0, \quad S_{n+1}^{/}(l,p) = E; \; C_{n+1}(l,p) = E, \quad C_{n+1}^{/}(l,p) = 0.$$

Вектор- функции $\psi_n, ..., \psi_2, \psi_1$ - определим по индукции соотношениями сопряжения (3.7) в которых положено $f = 0$.

Наконец, положим

$$\Omega_k(\xi,p) = \begin{pmatrix} \varphi_k(\xi,p) & \psi_k(\xi,p) \\ \varphi_k^{/}(\xi,p) & \psi_k^{/}(\xi,p) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Лемма 3.1 *При каждом k определитель $det\Omega_k(\xi,p)$ не зависит от переменной ξ и является целой функцией переменной p. Нули каждой из функций*
$\omega_k(p) = det\Omega_k(\xi,p)$ совпадают.

Доказательство. Независимость от переменной ξ определителей $\Omega_k(\xi,p)$ можно проверить так же как в п.2. Совпадение нулей определителей матриц $\Omega_k(\xi,p)$ вытекает из равенства

$$detM_{k1}\Omega_k(\xi,p) = detM_{k2}\Omega_{k+1}(\xi,p).$$

В этом параграфе считаем выполненными условия на нули:

в правой полуплоскости $Rep > 0$ нет нулей функции $\omega_k(p)$, т.е. для любого нуля p_j функции $\omega_k(p)$ выполнено:

$$Rep_j < 0, j \in N,$$

$$rank\ \Omega_k(p_j) \le r, k = \overline{1, n+1}.$$

Лемма 3.2 *Если выполнено условие на нули, то выполнено условие неограниченной разрешимости задачи:*

для $p = \sigma + i\tau; Rep = \sigma \ge \sigma_0$, где

σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа,

и $Jmp = \tau \in (-\infty, +\infty)$

матрицы $\Omega_s(\xi,p)$, $s = \overline{1, n+1}$ - невырожденные:

$$\det \quad \Omega_s(p) \ne 0. \tag{3.9}$$

Лемма 3.3 *Если выполнены условия неограниченной разрешимости задачи, то решение задачи (3.5)-(3.7) имеет вид:*

$$u_j = \sum_{m=0}^{n} \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} H^*_{j,m+1}(p,x,\xi)\ A^{-2}_{m+1} f_{m+1}(\xi)\, d\xi + \varphi_j \overset{0}{\varphi}{}^{-1}_{n+1} K_{n+1} +$$

$$+\psi_j \overset{0}{\psi}{}^{-1}_1 K_0 + \varphi_j (E0) \sum_{l=j}^{n+1} R_l - \psi_j (0E) \sum_{l=0}^{j-1} R_l, \tag{3.10}$$

где приняты обозначения

$$K_0 = \delta_{11}^0\, f_1^/\,(l_0) + \gamma_{11}^0\, f_1\,(l_0)\,, \quad K_{n+1} = \delta_{22}^{n+1}\, f_{n+1}^/\,(l) + \gamma_{22}^{n+1}\,(l)\,,$$

$$g_{sm} = \delta_{m1}^s\, f_s^/\,(l_s) + \gamma_{m1}^s\, f_s\,(l_s) - \left(\delta_{m2}^s\, f_{s+1}^/\,(l_s) + \gamma_{m2}^s\, f_{s+1}\,(l_s)\right),$$

$$s = \overline{1,n}, \;\; m = 1, 2;$$

$$\underset{1}{\overset{0}{\psi}} = \left(\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 p\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 p\right)\right)\psi_1\Big|_{x=l_0};$$

$$\underset{n+1}{\overset{0}{\varphi}} = \left(\left(\alpha_{22}^{n+1} + \delta_{22}^{n+1} p\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{22}^{n+1} + \gamma_{22}^{n+1} p\right)\right)\varphi_{n+1}\Big|_{x=l}.$$

Доказательство. Как следует из условия, правая часть формулы (3.10) имеет смысл. Прямая проверка показывает, что это действительно искомое решение.

Напомним, что здесь $H_{j,s}^*$ - образы матричнозначных функций влияния, определяемые равенствами:

при $k < s$

$$H_{k,s}^* = \varphi_k\,(x)\;(E0)\;\Omega_s^{-1}\,(\xi)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix},$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s;$$

при $k > s$

$$H_{k,s}^* = -\psi_k\,(x)\;(0E)\;\Omega_s^{-1}\,(\xi)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix},$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s;$$

при $k = s$

$$H_{k,k}^* = \begin{cases} \varphi_k\,(x)\;(E0)\;\Omega_k^{-1}\,(\xi)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k\,(x)\;(0E)\;\Omega_k^{-1}\,(\xi)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, & l_{k-1} < \xi < x < l_k. \end{cases}$$

Приступим к определению матричнозначных функций влияния $H_{j,s}$.Так как матричнозначные функции

$$\left(\varphi_k\,(x,p)\,,\psi_k\,(x,p)\right)\,\Omega_s^{-1}\;(\xi,p)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$$

не имеют особых точек во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, то

$$\varphi_k(x,p_j)\ (EO) \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_s^{-1}(\xi,p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} =$$

$$= -\psi_k(x,p_j)\,(0E) \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_s^{-1}(\xi,p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$k,s=\overline{1,n+1},\quad j\in N.$$

Так как особыми точками функции $H_{k,s}^*$ являются только полюса p_j, то в силу леммы Жордана [29] и теоремы Коши [29], находим с учетом (3.11) представление для функций влияния $H_{k,s}$ в виде ряда:

$$H_{k,s}(t,x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_k(x,p_j)\ (E0) \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_s^{-1}(\xi,p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} e^{p_j\cdot t},$$

$$k,s=\overline{1,n+1}.$$

Возвращаясь в формуле (3.10) к оригиналам, получим решение задачи (3.1)-(3.4) в виде:

$$u_k(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_k(x,p_j)\ (E0)\ \sum_{m=0}^{n}\int_{l_m}^{l_{m+1}} \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_{m+1}^{-1}(\xi,p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} e^{p_j t} A_{m+1}^{-2}\cdot$$

$$\cdot f_{m+1}(\xi)\,d\xi+\varphi_k(x,p_j) \underset{p=p_j}{res}\ \overset{0}{\varphi}{}_{n+1}^{-1}(K_{n+1}-K_0)\ e^{p_j t}+\varphi_k(x,p_j)\ (E0)\sum_{j=0}^{n+1}R_j. \tag{3.12}$$

3.2 Прямая и двойственная задачи Штурма-Лиувилля для оператора Фурье в I_n

Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-p_j\,A_m^{-2}\right) y_m(x,p_j)=0, \tag{3.13}$$

$$\left(\left(\alpha_{11}^0+\gamma_{11}^0\,p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\delta_{11}^0\,p_j\right)\right) y_1(x,p_j)\bigg|_{x=l_0}=0,$$

$$\left(\left(\alpha_{22}^{n+1}+\gamma_{22}^{n+1}\,p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{22}^{n+1}+\delta_{22}^{n+1}\,p_j\right)\right)\,y_{n+1}\left(x,p_j\right)\Big|_{x=l}=0,$$

$$\left(\left(\alpha_{m1}^{k}+\gamma_{m1}^{k}\,p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^{k}+\delta_{m1}^{k}\,p_j\right)\right)\,y_{k}\left(x,p_j\right)=$$

$$=\left(\left(\alpha_{m2}^{k}+\gamma_{m2}^{k}\,p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^{k}+\delta_{m2}^{k}\,p_j\right)\right)\,y_{k+1}\left(x,p_j\right)\ ,$$

$$x=l_k,\quad k=\overline{1,n},\quad m=1,2,$$

$$y_k\left(x,p_j\right)=\left(\begin{array}{l} y_{1k}\left(x,p_j\right)\\ \vdots\\ y_{rk}\left(x,p_j\right)\end{array}\right).$$

Пусть при некотором p_j, рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y\left(x,p_j\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,y_k\left(x,p_j\right).$$

В этом случае число p_j называется собственным значением, а соответствующее решение $y\left(x,p_j\right)$- собственной вектор- функцией.

Теорема 3.1 *.Краевая задача (3.13) имеет чисто точечный спектр, состоящий из нулей $\{p_j\}$ любой из функций $\omega_k\left(p\right)$. Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению p_j соответствует ровно r линейно независимых собственных вектор- функций, в качестве последних можно взять r столбцов матричнозначной функции $\varphi(x,p_j)$, т.е.*

$$y^i\left(x,p_j\right)=\left(\begin{array}{l} \varphi_1^i\left(x,p_j\right)\\ \vdots\\ \varphi_r^i\left(x,p_j\right)\end{array}\right),$$

$$\varphi\left(x,p_j\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,\varphi_k\left(x,p_j\right).$$

Доказательство. Установим вначале, что каждый нуль p_j любой из функций $\omega_k(p)$ является собственным значением краевой задачи (3.13). Примем обозначения

$$v^i(x,p_j) = \begin{pmatrix} \psi_1^i(x,p_j) \\ \vdots \\ \psi_r^i(x,p_j) \end{pmatrix},$$

$$\psi(x,p_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\,\psi_k(x,p_j).$$

Заметим, что вектора $\{y^i(x,p_j), v^i(x,p_j)\}, i=\overline{1,r}$ образуют фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - p_j\,A_m^{-2}\right) y_m(x,p_j) = 0, \quad m = \overline{1,n+1}.$$

В силу условия на нули: $rank\ \Omega_k \le r, k=\overline{1,n+1}$ заключаем, что каждый вектор $v^l(x,p_j)$ можно разложить по системе векторов $y^i(x,p_j), i=\overline{1,r}$, т.е. справедливо представление

$$v^l(x,p_j) = \sum_{i=1}^{r} c_{li} y^i(x,p_j). \tag{3.14}$$

Заметим, что каждый вектор $v^l(x,p_j)$ удовлетворяет:

1) граничному условию

$$\left(\left(\alpha_{11}^0 + \gamma_{11}^0\,p_j\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{11}^0 + \delta_{11}^0\,p_j\right)\right) v_1(x,p_j)\Big|_{x=l_0} = 0,$$

по построению;

2) граничному условию

$$\left(\left(\alpha_{22}^{n+1} + \gamma_{22}^{n+1}\,p_j\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{22}^{n+1} + \delta_{22}^{n+1}\,p_j\right)\right) v_{n+1}(x,p_j)\Big|_{x=l} = 0$$

в силу условия (3.14);

3) условиям сопряжения по построению.

Таким образом, вектора $v^l(x,p_j)$ образуют систему r линейно независимых собственных вектор- функций краевой задачи (3.13). Аналогично устанавливаем, что вектора $y^l(x,p_j)$ также образуют систему r линейно независимых собственных вектор - функций краевой задачи (3.13).

Наоборот, пусть число p_j -собственное значение рассматриваемой краевой задачи и $u(x,p_j)$- соответствующий собственный вектор. Из первого граничного условия

$$\left(\left(\alpha_{11}^0+\gamma_{11}^0 p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\delta_{11}^0 p_j\right)\right) v_1(x,p_j)\Big|_{x=l_0}=0,$$

следует, что

$$u(x,p_j)=\sum_{i=1}^{r} c_{li}y^i(x,p_j).$$

Из второго граничного условия

$$\left(\left(\alpha_{22}^{n+1}+\gamma_{22}^{n+1} p_j\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{22}^{n+1}+\delta_{22}^{n+1} p_j\right)\right) v_{n+1}(x,p_j)\Big|_{x=l}=0$$

следует, что

$$u(x,p)=\sum_{i=1}^{r} b_{li}v^i(x,p).$$

Из полученных разложений вектора $u(x,p_j)$ следует, что вектора $\{y^i(x,p_j),v^i(x,p_j)\}, i=\overline{1,r}$ линейно зависимы. Следовательно, $\det\Omega_k=0, k=\overline{1,n+1}$. В силу условия на нули, имеем:

$$rank\ \Omega_k\le r, k=\overline{1,n+1}.$$

Рассмотрим двойственную задачу Штурма-Лиувилля

$$y_m^*(\xi,\lambda)\left(\frac{d^2}{dx^2}+A_m^{-2}\lambda^2\right)=0,\quad m=\overline{1,n+1}, \tag{3.15}$$

$$\left(\frac{d}{dx}y_1^*\left(\beta_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0\right)^{-1}+y_1^*\left(\alpha_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0\right)^{-1}\right)\Big|_{x=l_0}=0,$$

$$\left(\frac{d}{dx}y_{n+1}^*\left(\beta_{22}^{n+1}+\lambda^2\delta_{22}^{n+1}\right)^{-1}+y_{n+1}^*\left(\alpha_{22}^{n+1}+\lambda^2\gamma_{22}^{n+1}\right)^{-1}\right)\Big|_{x=l}=0,$$

$$\left(y_k^*,-\frac{d}{d\xi}y_k^*\right)\begin{pmatrix}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k\\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$= \left(y_{k+1}^*, -\frac{d}{d\xi} y_{k+1}^*\right) \begin{pmatrix} \beta_{21}^k & \alpha_{21}^k \\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k \end{pmatrix}^{-1}, k = \overline{1, n}.$$

$$\left(\frac{d}{dx} y_{n+1}^* \left(\beta_{22}^{n+1}\right)^{-1} + y_1^* \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}\right) \Big|_{x=l} = 0.$$

Теорема 3.2 *.Спектр задачи (3.15) имеет чисто точечный спектр, состоящий из нулей $\{p_j\}$ любой из функций $\omega_k(p)$.Задача Штурма-Лиувилля r раз вырождена, т.е. каждому собственному значению p_j соответствует ровно r линейно независимых собственных вектор - функций, в качестве последних можно взять r строк-функций матричнозначной функции $\varphi^*(\xi,p_j)$:*

$$\varphi^*(\xi, p_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(\xi - l_{k-1})\, \theta(l_k - \xi)\, \varphi_k^*(\xi, p_j),$$

т.е.

$y^{*j}(\xi, p_j) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1}^*(\xi, p_j) & \cdots & \varphi_{jr}^*(\xi, p_j) \end{pmatrix}, j = \overline{1, r},$

где

$$\varphi_k^* = (E0)\, \Omega_k^{-1}(\xi, p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} A_k^{-2}, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

3.3 Теорема разложения по собственным функциям оператора Фурье в I_n

В силу начальных условий получим интегральное представление:

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_k(x, p_j) \sum_{m=0}^{n} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \underset{p=p_j}{res}\ \varphi_{m+1}^*(\xi, p)\, f_{m+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\varphi_k(x, p_j) \underset{p=p_j}{res}\ \overset{0}{\varphi}{}_{n+1}^{-1}(K_{n+1} - K_0) + \varphi_k(x, p_j)\, (E0) \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=1}^{n} \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_s^{-1}(l_s, p)\, M_{s1}^{-1} \begin{pmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Интегральное представление (3.16) приводит к представлению меры Дирака [65]

$$\delta(x-\xi)E = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(x,p_j) \underset{p=p_j}{res} \left\{ \varphi^*(\xi,p) + \overset{0}{\varphi}{}_{n+1}^{-1} \cdot \right.$$

$$\cdot \Big(\delta_{22}^{n+1} \delta_-^{/}(\xi-l) + \gamma_{22}^{n+1}\delta_-(\xi-l) - \delta_{11}^0 \delta_+^{/}(\xi-l_0) - \gamma_{11}^0 \delta_+(\xi-l_0) \Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (EO)\, \Omega_k^{-1}(l_k,p)\, M_{k1}^{-1}(p) \cdot$$

$$\left. \cdot \left(\begin{pmatrix} \gamma_{21}^k & \delta_{21}^k \\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_+(\xi-l_k) \\ \delta_+^{/}(\xi-l_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11}^k & \delta_{11}^k \\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_-(\xi-l_k) \\ \delta_-^{/}(\xi-l_k) \end{pmatrix} \right) \right\}, \tag{3.17}$$

где

$$\delta(x-\xi)E \equiv \begin{pmatrix} \delta(x-\xi) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \delta(x-\xi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.3 *.Если трижды непрерывно- дифференцируемая на I_n вектор-функция*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta(l_k-x)\, \theta(x-l_{k-1})\, f_k(x)$$

размера $r \times 1$, удовлетворяет краевым условиям (3.3) и условиям сопряжения (3.4), в которых выражение $\frac{\partial U_k}{\partial t}$ заменено на $A_k^2 f_k^{//}(x)$, то для каждой точки $x \in I_n$ справедливо представление функции $f\ (x)$ в виде суммы абсолютно и равномерно сходящегося на I_n ряда

$$\frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_k(x,p_j)\ \hat{f}_j, \tag{3.18}$$

где

$$\hat{f}_j = \sum_{m=0}^{n} \int_{l_m}^{l_{m+1}} (E0) \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_{m+1}^{-1}(\xi,p) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} A_{m+1}^{-2} f_{m+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \underset{p=p_j}{res}\ \overset{0}{\varphi}{}_{n+1}^{-1}(K_{n+1}-K_0) + (E0) \sum_{s=1}^{n} \underset{p=p_j}{res}\ \Omega_s^{-1}(l_s,p)\, M_{s1}^{-1} \begin{pmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$$l_{k-1} < x < l_k, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad j \in N.$$

Доказательство. Проверка утверждений теоремы проводится стандартным образом, например, методом Коши см. [31].

3.4 Прямое и обратное интегральные преобразования Фурье на отрезке с точками деления

Формулы (3.18)-(3.19) для разложения вектор- функции f по собственным векторам задачи Штурма- Лиувилля (3.13) порождает прямое F_n и обратное F_n^{-1} интегральные преобразования Фурье на отрезке с точками деления:

$$F_n\left[f\right] \equiv \hat{f}_j = \sum_{m=0}^{n} \int\limits_{l_m}^{l_{m+1}} (E0) \mathop{res}_{p=p_j} \ \Omega_{m+1}^{-1}\left(\xi,p\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ E \end{array} \right) A_{m+1}^{-2} f_{m+1}\left(\xi\right) d\xi +$$

$$+ \mathop{res}_{p=p_j} \ \overset{0}{\varphi}{}_{n+1}^{-1} \left(K_{n+1}-K_0\right) + (E0) \ \sum_{s=1}^{n} \mathop{res}_{p=p_j} \ \Omega_s^{-1}\left(l_s,p\right) M_{s1}^{-1} \left(\begin{array}{c} f_{s1} \\ f_{s2} \end{array} \right), \ j\in N, \tag{3.20}$$

$$F_n^{-1}\left[\hat{f}_j\right] \equiv f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(x,p_j\right) \ \hat{f}_j, \ \ x\in I_n, \tag{3.21}$$

где

$$f\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta\left(x-l_{k-1}\right) \ \theta\left(l_k-x\right) \ f_k\left(x\right).$$

3.5 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье в I_n

Получим основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$L \equiv \sum_{j=1}^{n+1} A_j^2 \, \theta\left(x-l_{j-1}\right) \ \theta\left(l_j-x\right) \ \frac{d^2}{dx^2}.$$

Теорема 3.4 *.Пусть вектор- функция f трижды непрерывно- дифференцируема на I_n, удовлетворяет краевым условиям (3.3) и условиям сопряжения в виде*

$$\left(\left(\alpha_{m1}^{k}+\delta_{m1}^{k}A_k^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m1}^{k}+\gamma_{m1}^{k}A_k^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)f_k=$$

$$=\left(\left(\alpha_{m2}^{k}+\delta_{m2}^{k}A_{k+1}^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{m2}^{k}+\gamma_{m2}^{k}A_{k+1}^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)f_{k+1},$$

$$x=l_k,\;\; k=\overline{1,n};\;\; m=1,\,2$$

тогда

$$F_{jn}\left[L\left(f\right)\right]=p_j\,\hat{f}_j,\;\; j\in N. \tag{3.22}$$

Доказательство. Проверка тождеств производится с помощью техники предложенной для доказательства теоремы 2.3.

Глава 4

Матричные интегральные преобразования Фурье - Бесселя на $(n+1)$- слойной полярной оси

4.1 Смешанная краевая задача для оператора Фурье- Бесселя

Построим методом дельтаобразных последовательностей интегральное преобразование на $(n+1)$-слойной полярной оси

$$I_n^+ = \left\{ r: \;\; r \in \overset{n+1}{\underset{k=1}{U}} (R_{k-1}, R_k) \,, \;\; R_{k-1} < R_k, \;\; R_0 = 0, \;\; R_{n+1} = \infty \right\}$$

порожденное дифференциальным оператором Фурье-Бесселя:

$$B_{(\nu,\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \theta\left(r - R_{k-1}\right) \theta\left(R_k - r\right) \; B_{\nu_k,\alpha_k} + \theta\left(r - R_n\right) \; A_{n+1}^2 \, B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}.$$

Здесь A_j - квадратная положительно-определенная матрица размера $\sigma \times \sigma$ [28], θ(x) - единичная функция Хевисайда, $\mathrm{B}_{\nu,\alpha}$ - дифференциальный оператор Фурье-Бесселя:

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}, \;\; \nu \geq \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

За дельтаобразную последовательность возьмем фундаментальную матрицу решений смешанной задачи Коши для сепаратной системы матричных уравнений параболического типа.

Рассмотрим задачу конструкции ограниченного на множестве

$$D^{+}=\left\{(t,r)\ :\ t>0,\ r\in\bigcup_{k=1}^{n+1}\left(R_{k-1},R_{k}\right),\ \ R_{0}=0,\ \ R_{n+1}=\infty\right\}$$

решения сепаратной матричной системы $(n+1)$ уравнений параболического типа:

$$\left(A_{m}^{-2}\frac{\partial}{\partial t}-B_{\nu_{m},\alpha_{m}}\right)U_{m}\left(t,r\right)=0,\quad m=\overline{1,n+1}, \tag{4.1}$$

по начальным условиям

$$U_{m}\left(t,r\right)\left.\right|_{t=0}=g_{m}\left(r\right),\ \ r\in\left(R_{k-1},R_{k}\right),\ \ m=\overline{1,n+1}, \tag{4.2}$$

по краевым условиям

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\alpha_{1}-\nu_{1}}U_{1}\right)\right|_{r=0}=0,\ \ U_{n+1}|_{r=\infty}=0, \tag{4.3}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{gathered}\left[\left(\alpha_{j1}^{k}+\gamma_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j1}^{k}+\delta_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]U_{k}=\\ =\left[\left(\alpha_{j2}^{k}+\gamma_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j2}^{k}+\delta_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]U_{k+1},\\ r=R_{k},\ \ k=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,\,2},\end{gathered} \tag{4.4}$$

здесь

$$U=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(r-R_{k-1}\right)\,\theta\left(R_{k}-r\right)\,U_{k}\,+\theta\left(r-R_{n}\right)\,U_{n+1}\quad -$$

неизвестная вектор-функция,

$$g=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(r-R_{k-1}\right)\,\theta\left(R_{k}-r\right)\,g_{k}\,+\theta\left(r-R_{n}\right)\,g_{n+1}\quad -$$

заданная вектор-функция, $\alpha_{mi}^{k},\ \beta_{mi}^{k},\ \gamma_{mi}^{k},\ \delta_{mi}^{k}$ – матрицы размера $\sigma\times\sigma$.

Специальное решение $H_{j,s}(t,r,\rho)$, удовлетворяющее условиям

$$H_{j,s}(t,r,\rho)\,|_{t=0}=\delta(r-\rho)\quad,\ r,\rho\in I_n^+,\ \ j=\overline{1,n+1},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\alpha_1-\nu_1}H_{1,s}\right)\Big|_{r=0}=0,\ \ \|H_{n+1,s}\|\,|_{r=\infty}=0$$

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]H_{k,s}-$$

$$-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]H_{k+1,s}=$$

$$=\gamma_{j1}^k\delta^{/}(R_k-\rho)+\delta_{j1}^k\delta(R_k-\rho)-\gamma_{j2}^k\delta^{/}(R_k-\rho)-\delta_{j2}^k\delta(R_k-\rho),$$

$$r=R_k,\ \ k=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,\,2},$$

назовем матричнозначной функцией влияния или функцией Грина. Зная функцию влияния $H_{j,s}=H_{j,s}(t,r,\rho)$, мы сможем написать решение общей краевой задачи (4.1)-(4.4). Нашей ближайшей целью является выяснение условий существования функций влияния и нахождение явных выражений для этих функций.

Предположим, что искомая вектор-функция $U=U(t,r)$ является оригиналом Лапласа по t. В образах Лапласа получаем задачу о конструкции ограниченного на множестве I_n^+ решения сепаратной матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(B_{\nu_j,\alpha_j}-q_j^2\right)U_j^*(p,r)=-\bar{g}_j(r), \tag{4.5}$$

$$q_j^2=A_j^{-2}p,\bar{g}_j(r)=A_j^{-2}g_j(r),\quad j=\overline{1,n+1},$$

по краевым условиям

$$\frac{d}{dr}\left(r^{\nu_1-\alpha_1}U_1^*\right)\Big|_{r=0}=0,\quad \left\|U_{n+1}^*(r,p)\right\|\,|_{r=\infty}<\infty, \tag{4.6}$$

и условиям контакта в точках стыка

$$\left[\left(\alpha_{m1}^k+p\gamma_{m1}^k\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{m1}^k+p\delta_{m1}^k\right)\right]U_k^*=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^k+p\gamma_{m2}^k\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{m2}^k+p\delta_{m2}^k\right)\right]U_{k+1}^*+ \tag{4.7}$$

$$+\left(\gamma_{m1}^{k}\frac{d}{dr}g_{k}\left(r\right)+\delta_{m1}^{k}g_{k}\left(r\right)\right)-\left(\gamma_{m2}^{k}\frac{d}{dr}g_{k+1}\left(r\right)+\delta_{m2}^{k}g_{k+1}\left(r\right)\right),$$

$$r=R_{k},\quad m=\overline{1,\,2},\ \ k=\overline{1,n}.$$

Обозначим

$$M_{ki}=\begin{pmatrix}\beta_{1i}^{k}+\delta_{1i}^{k}p & \alpha_{1i}^{k}+\gamma_{1i}^{k}p\\ \beta_{2i}^{k}+\delta_{2i}^{k}p & \alpha_{2i}^{k}+\gamma_{2i}^{k}p\end{pmatrix},\ \ k=\overline{1,n};\ \ i=\overline{1,2}$$

и будем считать выполненным условие положительной определенности матриц M_{ki}.

Образы Лапласа матричнозначных функций влияния $H_{j,s}^{*}$ являются решениями сепаратной матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(B_{\nu_{j},\alpha_{j}}-q_{j}^{2}\right)H_{j,s}^{*}\left(p,r,\rho\right)=-A_{j}^{2}\delta\left(r-\rho\right);$$

$$j,s=\overline{1,n+1},q_{j}^{2}=A_{j}^{2}p;$$

по краевым условиям

$$\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_{1}-\nu_{1}}H_{1,s}^{*}\right)\Big|_{r=0}=0,\ \ H_{n+1,s}^{*}\big|_{r=\infty}=0$$

и условиям контакта в точках стыка

$$\left[\left(\alpha_{m1}^{k}+p\gamma_{m1}^{k}\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{m1}^{k}+p\delta_{m1}^{k}\right)\right]H_{k,s}^{*}=$$

$$=\left[\left(\alpha_{m2}^{k}+p\gamma_{m2}^{k}\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{m2}^{k}+p\delta_{m2}^{k}\right)\right]H_{k+1,s}^{*},$$

$$m=\overline{1,\,2},\ \ k=\overline{1,n}.$$

Непосредственной проверкой установим, что образы Лапласа матричнозначных функций влияния $H_{j,s}^{*}$ задаются следующими формулами: при $k<s$

$$H_{k,s}^{*}=\varphi_{k}\left(r\right)\,\left(E0\right)\,\Omega_{s}^{-1}\left(\rho\right)\begin{pmatrix}0\\ E\end{pmatrix},$$

$$R_{k-1}<r<R_{k},\ \ R_{s-1}<\rho<R_{s}$$

при $k > s$

$$H^*_{k,s} = -\psi_k(r)\,(0E)\;\Omega_s^{-1}(\rho)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix},$$

$$R_{k-1} < r < R_k,\;\; R_{s-1} < \rho < R_s,$$

при $k = s$

$$H^*_{k,k} = \begin{cases} \varphi_k(r)\;(E0)\;\Omega_k^{-1}(\rho)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, & R_{k-1} < r < \rho < R_k \\ -\psi_k(r)\;(0E)\;\Omega_k^{-1}(\rho)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, & R_{k-1} < \rho < r < R_k. \end{cases}$$

При этом для компонентов матричнозначных функций влияния $H^*_{j,s}$ справедливы формулы:

$$\varphi_1(r,\sqrt{p}) = e^{(\alpha_1-\nu_1)\frac{\pi}{2}i} I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r) \in L_2(R_0,R_1),$$

$$\psi_{n+1}(r,\sqrt{p}) = H^2_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(-iq_{n+1}r) \in L_2(R_n,\infty),$$

где $I_{\nu,\alpha}(z) = z^{-\alpha} I_\nu(z)$, $H^2_{\nu,\alpha}(z) = z^{-\alpha}(J_\nu(z) - iN_\nu(z))$, причем $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$ - цилиндрические функции соответственно 1-го и 2-го рода порядка ν [19], а $I_\nu(z)$- цилиндрическая функция 1-го рода порядка ν мнимого аргумента. Остальные пары функций φ_m, ψ_m однозначно определяются условиями сопряжения:

$$\left(\left(\alpha^k_{j1} + p\gamma^k_{j1}\right)\frac{d}{dr} + \left(\beta^k_{j1} + p\delta^k_{j1}\right)\right)(\varphi_k \quad \psi_k) = \tag{4.8}$$

$$= \left(\left(\alpha^k_{j2} + p\gamma^k_{j2}\right)\frac{d}{dr} + \left(\beta^k_{j2} + p\delta^k_{j2}\right)\right)(\varphi_{k+1} \quad \psi_{k+1}),$$

$$r = R_k,\;\; k = \overline{1,n}.$$

Далее матрицы Ω_k определены соотношениями:

$$\Omega_k(\rho,\sqrt{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_k(\rho,\sqrt{p}) & \psi_k(\rho,\sqrt{p}) \\ \varphi_k^{/}(\rho,\sqrt{p}) & \psi_k^{/}(\rho,\sqrt{p}) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n+1}.$$

Лемма 4.1 *Если выполнено условие $M_{ki} > 0$, то выполнено условие неограниченной разрешимости задачи:*

для $p = \sigma + i\tau$ с $Rep = \sigma \geq \sigma_0$,

где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа,

и $Jmp = \tau \in (-\infty, +\infty)$
все матрицы Ω_k, $k = \overline{1, n+1}$ *- невырожденные,*

$$\det \ \Omega_k \neq 0, \quad k = \overline{1, n+1}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Дифференцированием по r устанавливаем, что определители $\det\ (r^{2\alpha_k+1}\Omega_k)$ не зависят от переменной r. Из равенства

$$M_{k1}\Omega_k(\xi, p) = M_{k2}\Omega_{k+1}(\xi, p)$$

и из требования положительной определенности матриц M_{ki} будет следовать невырожденность матриц Ω_k.

Лемма 4.2 *Если выполнено условие неограниченной разрешимости задачи, то ограниченное на множестве* I_n^+ *решение сепаратной системы (4.5)-(4.7) имеет вид:*

$$U_j^*\,(p, r) = \sum_{m=0}^{n} \int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} H_{j,m+1}^*\,(p, r, \rho)\ \bar{g}_{m+1}\,(\rho)\ d\rho \quad +$$

$$+\varphi_j\,(E0) \sum_{k=j}^{n+1} P_k - \psi_j\,(0E) \sum_{k=0}^{j-1} P_k, \tag{4.10}$$

$$j = \overline{1, n+1},$$

где

$$P_k = \Omega_k^{-1}\, M_{k1}^{-1} \begin{pmatrix} \left(\gamma_{11}^k \frac{d}{dr} g_k\,(R_k) + \delta_{11}^k g_k\,(R_k)\right) - \\ \left(\gamma_{21}^k \frac{d}{dr} g_k\,(R_k) + \delta_{21}^k g_k\,(R_k)\right) - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - \left(\gamma_{12}^k \frac{d}{dr} g_{k+1}\,(R_k) + \delta_{12}^k g_{k+1}\,(R_k)\right) \\ - \left(\gamma_{22}^k \frac{d}{dr} g_{k+1}\,(R_k) + \delta_{22}^k g_{k+1}\,(R_k)\right) \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \ P_{n+1} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Существование правой части обеспечивается условием неограниченной разрешимости задачи. Непосредственные вычисления показывают, что формула (4.10) действительно определяет решение смешанной задачи.

Приступим к вычислению матричнозначных функций влияния $H_{k,s}$. Конструкция образов Лапласа функций влияния $H_{k,s}^*$ такова, что их особыми точками являются точки ветвления$p = 0$ и $p = \infty$.

В силу леммы Жордана и теоремы Коши [29] для оригинала функции влияния получаем формулу обращения

$$H_{k,s}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_k(r,\lambda)\,(0E)\,\tilde{\Omega}_s(\rho,\lambda)\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}e^{-\lambda^2 t}\lambda d\lambda. \tag{4.11}$$

где

$$\tilde{\Omega}_s=\frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix}\varphi_s & \tilde{\varphi}_s+i\tilde{\psi}_s\\ \varphi_s^{/} & \tilde{\varphi}_s^{/}+i\tilde{\psi}_s^{/}\end{pmatrix}^{-1}-\begin{pmatrix}\varphi_s & \tilde{\varphi}_s-i\tilde{\psi}_s\\ \varphi_s^{/} & \tilde{\varphi}_s^{/}-i\tilde{\psi}_s^{/}\end{pmatrix}^{-1}\right)=$$

$$=(E_{2\sigma}0_{2\sigma})\begin{pmatrix}\varphi_s & \tilde{\varphi}_s & 0 & -\tilde{\psi}_s\\ \varphi_s^{/} & \tilde{\varphi}_s^{/} & 0 & -\tilde{\psi}_s^{/}\\ 0 & \tilde{\psi}_s & \varphi_s & \tilde{\varphi}_s\\ 0 & \tilde{\psi}_s^{/} & \varphi_s^{/} & \tilde{\varphi}_s^{/}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0_{2\sigma}\\ E_{2\sigma}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{n+1}=N_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r),\quad \tilde{\varphi}_{n+1}=J_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r)$$

функции $\tilde{\psi}_j,\tilde{\varphi}_j, j=\overline{1,n}$ определяются условиями сопряжения (4.8).

Для обоснования формулы (4.11) заметим также, что конструкция матричнозначных функций φ_k, ψ_k такова, что при переходе с нижнего берега разреза на верхний берег разреза все матричные функции

$$(\varphi_k \quad \psi_k)\;\Omega_s^{-1}(\rho,\lambda)\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}$$

останутся неизменными.

Возвращаясь в формулах (4.9) к оригиналам, найдем решение задачи (4.1)-(4.4) в виде:

$$U_k(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\sum_{m=0}^{n}\int\limits_{R_m}^{R_{m+1}}\varphi_k(r,\lambda)\,(0E)\,\tilde{\Omega}_{m+1}(\rho,\lambda)\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}A_{m+1}^{-2}g_{m+1}(\rho)\,d\rho+\right.$$

$$\left.+\varphi_k(r,\lambda)\sum_{k=1}^{n}(0E)\,\tilde{P}_k\right)e^{-\lambda^2 t}\lambda\;d\lambda\;, \tag{4.12}$$

$$R_{k-1}<r<R_k, k=\overline{1,n+1},$$

где

$$\tilde{P}_k=\tilde{\Omega}_k\,M_{k1}^{-1}\left(\begin{array}{l}\left(\gamma_{11}^k\frac{d}{dr}g_k(r)+\delta_{11}^k g_k(r)\right)-\\ \left(\gamma_{21}^k\frac{d}{dr}g_k(r)+\delta_{21}^k g_k(r)\right)-\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -\left(\gamma_{12}^{k}\frac{d}{dr}g_{k+1}\left(r\right)+\delta_{12}^{k}g_{k+1}\left(r\right)\right) \\ -\left(\gamma_{22}^{k}\frac{d}{dr}g_{k+1}\left(r\right)+\delta_{22}^{k}g_{k+1}\left(r\right)\right) \end{array}\right).$$

4.2 Теорема разложения по собственным функциям оператора Фурье-Бесселя

Для получения теоремы разложения применим метод δ- образных последовательностей [37]. Перейдем в формуле (4.12) к пределу при $t \to 0$. В силу начальных условий (4.2), получаем интегральное представление:

$$g_k\left(r\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^{n}\int\limits_{R_m}^{R_{m+1}}\varphi_k\left(r,\lambda\right)\left(\left(0E\right)\tilde{\Omega}_{m+1}\left(\rho,\lambda\right)\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}A_{m+1}^{-2}\,g_{m+1}\left(\rho\right)d\rho+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(0E\right)\,\tilde{\Omega}_k\left(R_k,\lambda\right)M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\begin{pmatrix}\delta_{11}^{k} & \gamma_{11}^{k}\\ \delta_{21}^{k} & \gamma_{21}^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_k\left(R_k\right)\\ g_k^{/}\left(R_k\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta_{12}^{k} & \gamma_{2}^{k}\\ \delta_{22}^{k} & \gamma_{2}^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{k+1}\left(R_k\right)\\ g_{k+1}^{/}\left(R_k\right)\end{pmatrix}\right)\right)\lambda\,d\lambda; \tag{4.13}$$

$$k=\overline{1,n+1}.$$

Если положить

$$u\left(r,\lambda\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\,\left(r-R_{k-1}\right)\,\theta\,\left(R_k-r\right)\varphi_k\left(r,\lambda\right)+\theta\,\left(r-R_n\right)\varphi_{n+1}\left(r,\lambda\right),$$

и, также,

$$u^*\left(\rho,\lambda\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\,\left(\rho-R_{k-1}\right)\,\theta\,\left(R_k-r\right)u_k^*\left(\rho,\lambda\right)+\theta\,\left(\rho-R_n\right)u_{n+1}^*\left(\rho,\lambda\right),$$

где

$$u_k^*=\left(0E\right)\,\tilde{\Omega}_k^{-1}\left(\rho,\lambda\right)\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}A_k^{-2}+M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\begin{pmatrix}\gamma_{11}^{k} & \delta_{11}^{k}\\ \gamma_{21}^{k} & \delta_{21}^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{-}^{/}\left(\rho-R_k\right)\\ \delta_{-}\left(\rho-R_k\right)\end{pmatrix}-$$

$$-M_{k2}^{-1}\left(\lambda\right)\begin{pmatrix}\gamma_{12}^{k-1} & \delta_{12}^{k-1}\\ \gamma_{22}^{k-1} & \delta_{22}^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{+}^{/}\left(\rho-R_{k-1}\right)\\ \delta_{+}\left(\rho-R_{k-1}\right)\end{pmatrix},$$

и принять обозначения:

$$\delta_+(x) = \frac{dS_+(x)}{dx}, \ \ \delta_-(x) = \frac{dS_-(x)}{dx},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}^0 & \delta_{11}^0 \\ \gamma_{21}^0 & \delta_{21}^0 \end{pmatrix} \equiv 0, \ \ \begin{pmatrix} \gamma_{12}^{n+1} & \delta_{12}^{n+1} \\ \gamma_{22}^{n+1} & \delta_{22}^{n+1} \end{pmatrix} \equiv 0,$$

то интегральное представление (4.13) приводит к интегральному представлению меры Дирака [65]

$$\delta(r-\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u(r,\lambda)\ u^*(\rho,\lambda)\ \lambda d\lambda. \tag{4.14}$$

Интегральное представление меры Дирака порождает прямое H_{n+} и обратное H_{n+}^{-1} матричные преобразования Фурье-Бесселя на полярной оси с точками деления по правилам:

$$H_{n+}[f]\ (\lambda) = \int\limits_0^\infty u^*(\rho,\lambda)\ f(\rho)\,d\rho + \sum_{k=1}^{n}(0E)\ \tilde{\Omega}_k(R_k,\lambda)\ M_{k1}^{-1}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{pmatrix} \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k \\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{k+1}(R_k) \\ f_{k+1}^{/}(R_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11}^k & \delta_{11}^k \\ \gamma_{21}^k & \delta_{21}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_k(R_k) \\ f_k^{/}(R_k) \end{pmatrix}\right) \equiv \hat{f}(\lambda), \tag{4.15}$$

$$H_{n+}^{-1}\left[\hat{f}\right]\ (r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u(r,\lambda)\ \hat{f}(\lambda)\,\lambda d\lambda \equiv f(r), \tag{4.16}$$

где

$$f(r) = \sum_{k=1}^{n}\theta(r-R_{k-1})\ \theta(R_k-r)\ f_k(r) + \theta(r-R_n)\ f_{n+1}(r).$$

Применив схему доказательства, разработанную в г.1, установим теорему разложения по собственным вектор-функциям задачи Штурма-Лиувилля для оператора Фурье-Бесселя.

Теорема 4.1 .*Если вектор-функция*

$$f(r) = \sum_{k=1}^{n}\theta(r-R_{k-1})\ \theta(R_k-r)\ f_k(r) + \theta(r-R_n)\ f_{n+1}(r)$$

определена, кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на I_n^+, то для $r \in I_n^+$ справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{2}\left[f\left(r-0\right)+f\left(r+0\right)\right]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u\left(r,\lambda\right)\left(\int\limits_0^\infty u^*\left(\rho,\lambda\right)f\left(\rho\right)d\rho+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(0E\right)\tilde{\Omega}_k\left(R_k,\lambda\right)M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\begin{pmatrix}\delta_{11}^k & \gamma_{11}^k\\ \delta_{21}^k & \gamma_{21}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k\left(R_k\right)\\ f_k^{/}\left(R_k\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta_{12}^k & \gamma_{12}^k\\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}\left(R_k\right)\\ f_{k+1}^{/}\left(R_k\right)\end{pmatrix}\right)\right)\lambda d\lambda. \tag{4.17}$$

4.3 Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье- Бесселя

Задача Штурма-Лиувилля для оператора Фурье-Бесселя состоит в определении нетривиального решения сингулярной спектральной задачи:

$$\left(B_{\nu_m,\alpha_m}+A_m^{-2}\lambda^2\right)y_m\left(r,\lambda\right)=0,\ \ m=\overline{1,n+1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_1-\nu_1}y_1\left(r,\lambda\right)\right)\Big|_{r=0}=0,\quad y_{n+1}|_{r=\infty}=0$$

$$\left(\left(\alpha_{j1}^k-\gamma_{j1}^kA_m^{-2}\lambda^2\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{j1}^k-\delta_{j1}^kA_m^{-2}\lambda^2\right)\right)y_k= \tag{4.18}$$

$$=\left(\left(\alpha_{j2}^k-\gamma_{j2}^kA_m^{-2}\lambda^2\right)\frac{d}{dr}+\left(\beta_{j2}^k-\delta_{j2}^kA_m^{-2}\lambda^2\right)\right)y_{k+1}, r=R_k,$$

$$k=\overline{1,n},\ \ m=\overline{1,2}.$$

Теорема 4.2 *.Для любого действительного значения параметра $\lambda \in (0,\infty)$ сингулярная спектральная задача Штурма-Лиувилля (4.18) имеет ровно σ линейно независимых решений, в качестве которых можно выбрать σ столбцов матричнозначной функции*

$$u\left(r,\lambda\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\ \left(r-R_{k-1}\right)\ \theta\ \left(R_k-r\right)\varphi_k\left(r,\lambda\right)+\theta\ \left(r-R_n\right)\varphi_{n+1}\left(r,\lambda\right).$$

Двойственная задача Штурма-Лиувилля для оператора Фурье-Бесселя состоит в определении нетривиального решения сингулярной спектральной задачи

$$y_m^*(\rho,\lambda)\left(B_{\nu_m,\alpha_m}+A_m^{-2}\lambda^2\right)=0,\quad m=\overline{1,n+1}$$

$$\left(-\frac{d}{dr}y_k^* \quad y_k^*\right)\begin{pmatrix}\alpha_{11}^k-\gamma_{11}^kA_k^{-2}\lambda^2 & \alpha_{21}^k-\gamma_{21}^kA_k^{-2}\lambda^2\\ \beta_{11}^k-\delta_{11}^kA_k^{-2}\lambda^2 & \beta_{21}^k-\delta_{21}^kA_k^{-2}\lambda^2\end{pmatrix}^{-1}= \tag{4.19}$$

$$=\left(-\frac{d}{dr}y_{k+1}^* \quad y_{k+1}^*\right)\begin{pmatrix}\alpha_{21}^k-\gamma_{21}^kA_k^{-2}\lambda^2 & \alpha_{22}^k-\gamma_{22}^kA_k^{-2}\lambda^2\\ \beta_{21}^k-\delta_{21}^kA_k^{-2}\lambda^2 & \beta_{22}^k-\delta_{22}^kA_k^{-2}\lambda^2\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\rho=R_k,\quad k=\overline{1,n}$$

$$\left.\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_1-\nu_1}\,y_1^*\right)\right|_{r=0}=0,\qquad \left.y_{n+1}^*\right|_{r=\infty}=0.$$

Теорема 4.3 .*Для любого действительного значения параметра* $\lambda\in(0,\infty)$ *сингулярная спектральная задача Штурма-Лиувилля (4.19) имеет ровно* σ *линейно независимых решений, в качестве которых можно выбрать* σ *строк матричнозначной функции*

$$u^*(\rho,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta\,(\rho-R_{k-1})\,\theta\,(R_k-r)\,u_k^*(\rho,\lambda)+\theta\,(\rho-R_n)\,u_{n+1}^*(\rho,\lambda).$$

4.4 Основное тождество интегрального преобразования оператора Фурье-Бесселя

Получим основное тождество интегрального преобразования Фурье-Бесселя в действии на дифференциальный оператор

$$B=\sum_{j=1}^{n}\theta\,(r-R_{j-1})\,\theta\,(R_j-r)\,A_j^2B_{\nu_j,\alpha_j}+\theta\,(r-R_n)\,A_{n+1}^2B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}.$$

Теорема 4.4 .*Пусть вектор-функция*

$$f(r)=\sum_{k=1}^{n}\theta\,(r-R_{k-1})\,\theta\,(R_k-r)\,f_k(r)+\theta\,(r-R_n)\,f_{n+1}(r)$$

трижды непрерывно-дифференцируемая на множестве I_n^+, *и пусть вектор-функция* $r^{\alpha_1-\nu_1}\,f_1\,(r)$ *исчезает при* $r\to 0$ *вместе со своей первой производной, а при* $r\to\infty$ *вектор-функция* $r^{\alpha_{n+1}+\frac{1}{2}}f_{n+1}\,(r)$ *- исчезает на бесконечности вместе со своей первой производной, тогда имеет место тождество*

$$H_{n+}\,(\,B\,[f])\,(\lambda)\equiv -\lambda^2\,\hat{f}\,(\lambda)-\sum_{k=1}^{n}(0E)\,\tilde{\Omega}_k\,(R_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{pmatrix}\beta_{21}^k & \alpha_{21}^k\\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}\,(l_k)\\ f_{k+1}^{/}\,(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k\\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k\,(l_k)\\ f_k^{/}\,(l_k)\end{pmatrix}+\right. \tag{4.20}$$

$$+\begin{pmatrix}\delta_{11}^k & \gamma_{11}^k\\ \delta_{12}^k & \gamma_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{\nu_k,\alpha_k}\,[f_k]\,(R_k)\\ \frac{d}{dr}B_{\nu_k,\alpha_k}\,[f_k]\,(R_k)\end{pmatrix}-$$

$$\left.-\begin{pmatrix}\delta_{12}^k & \gamma_{12}^k\\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}\,[f_{k+1}]\,(R_k)\\ \frac{d}{dr}B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}\,[f_{k+1}]\,(R_k)\end{pmatrix}\right\}.$$

Доказательство. Прежде заметим,что для решения $u(t,r)$ неоднородной смешанной задачи Коши (4.1)-(4.4) с условиями сопряжения вида:

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u_k$$

$$=\left[\left(\alpha_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\beta_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u_{k+1}+h_j^k, \tag{4.21}$$

$$r=R_k,\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,2},$$

где

$$h_j^k=\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}f_k\,(R_k)+\beta_{j1}^kf_k\,(R_k)\right)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}f_{k+1}\,(R_k)+\beta_{j2}^kf_{k+1}\,(R_k)\right)$$

справедливо представление:

$$u\,(t,r)=H_{n+}^{-1}\left[e^{-\lambda^2t}\left(H_{n+}\,[f]+\sum_{k=1}^{n}(0E)\,\tilde{\Omega}_k\,(R_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}\,(\lambda)\begin{pmatrix}h_1^k\\ h_2^k\end{pmatrix}\right)\right]. \tag{4.22}$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial t}u\,(t,r)$ служит решением смешанной краевой задачи (4.1)-(4.4) с начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial t}u\,(t,r)\quad\Bigg|_{t=0}=B_{(\nu,\alpha)}[f]$$

и условиями сопряжения (4.4).

Применив интегральное представление (4.12), получим для решения $\frac{\partial}{\partial t}u\,(t,r)$ (или, что одно и то же, для $B_{(\nu,\alpha)}u\,(t,r)$) выражение:

$$B_{(\nu,\alpha)}\,(u)=H_{n+}^{-1}\left\{e^{-\lambda^2 t}\left[H_{n+}\left(B_{(\nu,\alpha)}\,(f)\right)+\sum_{k=1}^{n}(0E)\;\tilde{\Omega}_k\,(R_k,\lambda)\;M_{k1}^{-1}\,(\lambda)\cdot\right.\right. \tag{4.23}$$
$$\cdot\left(\begin{pmatrix}\delta_{11}^k & \gamma_{11}^k\\ \delta_{21}^k & \gamma_{21}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k^2 B_{\nu_k,\alpha_k}\,[g_k]\,(R_k)\\ A_k^2\frac{d}{dr}B_{\nu_k\alpha_k}\,[g_k]\,(R_k)\end{pmatrix}-\right.$$
$$\left.\left.-\begin{pmatrix}\delta_{12}^k & \gamma_{12}^k\\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k+1}^2 B_{\nu_{k+1}\alpha_{k+1}}\,[g_{k+1}]\,(R_k)\\ A_{k+1}^2\frac{d}{dr}B_{\nu_{k+1}\alpha_{k+1}}\,[g_{k+1}]\,(R_k)\end{pmatrix}\right)\right\}.$$

Дифференцируя представление (4.22) по t и учитывая равенство (4.1), получим представление для $B_{(\nu,\alpha)}\,[u]$:

$$B_{(\nu,\alpha)}\,(u)=H_{n+}^{-1}\left\{e^{-\lambda^2 t}\left(H_{n+}\left(B_{(\nu,\alpha)}\,(f)\right)+\sum_{k=1}^{n}(0E)\;\tilde{\Omega}_k\,(R_k,\lambda)\;M_{k1}^{-1}\,(\lambda)\cdot\right.\right. \tag{4.24}$$
$$\cdot\left(\begin{pmatrix}\delta_{11}^k & \gamma_{11}^k\\ \delta_{21}^k & \gamma_{21}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k^2 B_{\nu_k,\alpha_k}\,[g_k]\,(R_k)\\ A_k^2\frac{d}{dr}B_{\nu_k\alpha_k}\,[g_k]\,(R_k)\end{pmatrix}-\right.$$
$$\left.\left.-\begin{pmatrix}\delta_{12}^k & \gamma_{12}^k\\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{k+1}^2 B_{\nu_{k+1}\alpha_{k+1}}\,[g_{k+1}]\,(R_k)\\ A_{k+1}^2\frac{d}{dr}B_{\nu_{k+1}\alpha_{k+1}}\,[g_{k+1}]\,(R_k)\end{pmatrix}\right)\right\}.$$

Сравнивая два интегральных представления (4.23) и (4.24) вектор-функции $B_{(\nu,\alpha)}\,[u]$, ввиду однозначности интегрального преобразования Фурье-Бесселя H_{n+}, заключаем, что доказываемое тождество справедливо.

Часть II

Оператор Римана - Лиувилля

Глава 5

Оператор Римана - Лиувилля в классе функций, гармонических в областях со сферической симметрией, и его применения

5.1 Определение и свойства оператора Римана- Лиувилля

Пусть $V-$ ограниченная звездообразная относительно начала координат область из R^n, граница которой $S-$ регулярная по Ляпунову поверхность [17]. Область V допускает параметризацию

$$V = \left\{ x : x = r\eta; \eta \in S,\ 0 \le r < 1 \right\}.$$

При этом оператор Лапласа Δ запишется в виде:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \Delta_\eta u,$$

здесь Δ_η - оператор Лапласа на поверхности S, а

$$\eta^2 = \eta_1^2 + ... + \eta_n^2.$$

Если функция $u = u\,(x)\,, x = (x_1, ..., x_n)$ гармоническая в области V и непрерывная на $\overline{V} = V \bigcup S$, то справедлива формула:

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi)u(\xi)dS_\xi, x \in V,$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина для области V. Функция Грина $G(r\eta,\xi)$ вещественно- аналитична по всем своим аргументам [17], в частности, она аналитична по r, следовательно может быть разложена в степенной ряд по переменной r:

$$G(r\eta,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\eta,\xi)r^k, 0 \le r < 1.$$

Говорят, что функция $\omega\left(x\right) \in \Omega$, если она неотрицательна и непрерывна на [0,1), причем

$$\omega\left(0\right) = 1, \int\limits_0^1 \omega\left(x\right)\ dx < \infty$$

и для любого r из [0,1)

$$\int\limits_r^1 \omega\left(x\right)\ dx > 0.$$

В [13] введена функция

$$p\left(r\right) = r\int\limits_r^1 \frac{\omega\left(x\right)}{x^2}dx, \omega\left(x\right) \in \Omega, r \in (0,1], p(0) = 1,$$

И последовательность чисел

$$\Delta_k = -\left(k+1\right)\ \int\limits_0^1 r^k dp\left(r\right).\ \left(k = 0,1,2,...\right)$$

Показано, что все числа Δ_k положительны, причем

$$\Delta_0 = 1\ , \Delta_k = k\ \int\limits_0^1 r^{k-1}\omega\left(r\right)dr\ \left(k = 1,2,...\right).$$

Кроме того, установлено [13] , что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\Delta_k} = 1. \tag{5.1}$$

Там же показано, что если функция $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на [0,1), то последовательность положительных чисел

$$\{\mu_k\}_0^\infty \equiv \left\{\Delta_k^{-1}\right\}_0^\infty$$

не возрастающая и выпуклая, т.е. $\mu_{k+1} \le \mu_k$, k=0,1,2,... и

$$\Delta^2\mu_k \equiv \mu_{k+2} - 2\mu_{k+1} + \mu_k \ge 0, k = 0, 1, 2, ...$$

Приведем аналог теоремы о cos- тригонометрических рядах.

Теорема 5.1 *Если последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ вполне монотонна, т.е.* $(-1)^r \Delta^r a_k \ge 0, (r = 1, 2, ...k = 0, 1, 2, ...)$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n G_n(\eta, \xi) \tag{5.2}$$

сходится всюду в [0,1) $\times$ S $\times$ S, к неотрицательной функции, суммируемой по всем аргументам.

Доказательство. Согласно теореме Ф. Хаусдорфа [33] последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ является последовательностью моментов некоторого распределения вероятностей F , сосредоточенного на [0,1]. Таким образом, $a_k = \int\limits_0^1 x^k dF(x)$. Рассмотрим функцию

$$G(rx\eta, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n G_n(\eta, \xi) x^n. \tag{5.3}$$

Функция $G(rx\eta, \xi)$ - как функция Грина соответствующей задачи Дирихле неотрицательна, суммируема по всем аргументам [16]. Теорема Фубини [16] утверждает, что функция

$$\int_0^1 G(rx\eta, \xi) x^k dF(x)$$

неотрицательна, суммируема по аргументам (η,ξ). Ряд в правой части (5.3) сходится равномерно по аргументу x. Интегрируя почленно ряд (5.3), вспоминая определение последовательности $\{a_n\}_0^\infty$, получим равенство

$$\int\limits_0^1 G\left(rx\eta,\xi\right)x^k dF\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n G_n\left(\eta,\xi\right)a_n.$$

Из установленного тождества следует, что ряд (5.3) сходится к неотрицательной функции, суммируемой по всем аргументам. Теорема доказана.

Следуя [13], введем обобщенный оператор типа Римана- Лиувилля $L^{(\omega)}$:

$$L^{(\omega)}\left[\varphi\left(r\right)\right]=-\frac{d}{dr}\left\{r\int\limits_0^1\varphi\left(r\tau\right)dp\left(\tau\right)\right\}, r\in(0,1).$$

Заметим, что

$$L^{(\omega)}\left[r^k\right]=\Delta_k r^k, r\in(0,1]\ \left(k=0,1,2,...\right). \tag{5.4}$$

Теорема 5.2 *Если $u=u(r\eta)-$ гармоническая в области V функция и непрерывная на V, то функция*

$$u_\omega\left(r\eta\right)=L^{(\omega)}\left[u\left(r\eta\right)\right]$$

будет гармонической в той же области V.

Доказательство. Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta u\equiv\frac{1}{\eta^2}\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\Delta_\eta u.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что операторы $\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(n-1)r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ и $L^{(\omega)}$ коммутируют. Следовательно,

$$\left(r^2\tfrac{\partial^2}{\partial r^2}+(n-1)r\tfrac{\partial}{\partial r}+\Delta_\eta\right)\ (L^{(\omega)}[u])=$$
$$=L^{(\omega)}\left[\left(r^2\tfrac{\partial^2}{\partial r^2}+(n-1)r\tfrac{\partial}{\partial r}+\Delta_\eta\right)u\right]=0.$$

Теорема доказана.

5.2 Обобщенная формула Пуассона, ассоциированная с функцией $\omega\left(x\right)\in\Omega$.

Рассмотрим степенной ряд, порожденный функцией Грина

$$G(r\eta,\xi;\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}q_kG_k(\eta,\xi)\,r^k,$$

в котором последовательность $\{\,q_k\,\}_0^\infty$ определена формулой $q_k=\Delta_k^{-1}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta_k}=1$, то радиус сходимости этого ряда равен единице. Заметим, что функция $G\left(r\eta,\xi;\omega\right)$ является гармонической в области V переменных $\left(r,\eta\right)$.

Замечание 5.1. Если функция $\omega\left(x\right)\in\Omega$ не убывает на [0,1), то семейство гармонических функций $G\left(r\eta,\xi;\omega\right)$ удовлетворяет условию

$$G\left(r\eta,\xi;\omega\right)\geq 0\ ,\ 0\leq r<1;\ \eta,\xi\in S. \tag{5.5}$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 5.1. Напомним, что

$$\Delta_0=1\ ,\Delta_k=k\int\limits_0^1 r^{k-1}\omega\left(r\right)dr\ \ \left(k=0,1,2,...\right).$$

Методом математической индукции установим равенство

$$\Delta^l(\Delta_k)=\int\limits_0^1\left(r-1\right)^{l-1}r^{k-1}\left[\left(k+l\right)r-k\right]\ \omega\left(r\right)dr\ \ \left(k=0,1,2,...;l=1,2,...\right).$$

Преобразуем полученное выражение

$$\left(-1\right)^{l-1}\Delta^l(\Delta_k)=\ -\int\limits_0^{\frac{k}{k+l}}\left(1-r\right)^{l-1}r^{k-1}\left[k-\left(k+1\right)x\right]\ \omega\left(r\right)dr+$$

$$+\int\limits_{\frac{k}{k+l}}^1\left(1-r\right)^{l-1}r^{k-1}\left[\left(k+l\right)r-k\right]\ \omega\left(r\right)dr\geq$$

$$\geq -\int\limits_0^{\frac{k}{k+l}} (1-r)^{l-1} r^{k-1} \left[k-(k+1)\,x\right]\ \omega\left(\tfrac{k}{k+l}\right) dr +$$

$$\geq \int\limits_{\frac{k}{k+l}}^{1} (1-r)^{l-1} r^{k-1} \left[(k+l)\,r-k\right]\ \omega\left(\tfrac{k}{k+l}\right) dr =$$

$$= \omega\left(\tfrac{k}{k+l}\right) \int\limits_0^1 (1-r)^{l-1} r^{k-1} \left[(k+l)\,r-k\right] dr =$$

$$= \omega\left(\tfrac{k}{k+l}\right) \left(\tfrac{(k+l)\Gamma(l)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+l+1)} - \tfrac{k\Gamma(l)\Gamma(k)}{\Gamma(l+k)} =\right)$$

$$= \omega\left(\frac{k}{k+l}\right) \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+k)} \left(\frac{(k+l)\,k}{(k+l)} - k\right) \geq 0.$$

Таким образом, доказано, что $(-1)^{l-1}\Delta^l(\Delta_k) \geq 0$. Следовательно, последовательность $\{-\Delta_k\}_0^\infty$ - вполне монотонна. Отсюда, применив свойство вполне монотонных последовательностей из [33], найдем, что

$$(-1)^r\,\Delta^r q_k \geq 0, (r=1,2,...k=0,1,2,...).$$

Итак, последовательность $\{q_n\}_0^\infty$ - вполне монотонна. Воспользовавшись теоремой 5.1, доказательство завершим.

Теорема 5.3 *Если функция $u\,(r\eta)$ - гармоническая функция в области V и непрерывна на $\bar{V}$, то функция $L^{(\omega)}\left[u\,(r\eta)\right]$, гармоническая функция в той же области V, и для любого ρ $(0<\rho<1)$ справедлива интегральная формула*

$$u\,(r\eta) = \int\limits_S G(\frac{r}{\rho}\eta,\xi;\omega)\ u_\omega\,(\rho\xi)\ dS_\xi, (0 \leq r < \rho\ , \eta \in S) \qquad (5.6)$$

где

$$u_\omega\,(r\eta) \equiv L^{(\omega)}\left[u\,(r\eta)\right].$$

Доказательство. В силу теоремы 5.2 функция $L^{(\omega)}\left[u\,(r\eta)\right]$ гармоническая в области $V_\rho = \left\{x \in R^n : \frac{x}{\rho} \in V\right\}$, и, поэтому она может быть представлена формулой Грина

$$u_\omega(r\eta) = \int\limits_S G(\frac{r}{\rho}\eta,\xi)u_\omega(\rho\xi)dS_\xi.$$

Введем к рассмотрению функцию

$$v\left(r\eta\right)=\int\limits_{S}G(\frac{r}{\rho}\eta,\xi;\omega)\ u_{\omega}\left(\rho\xi\right)\ dS_{\xi},\left(0\leq r<\rho\ ,\eta\in S\right)\ .$$

Действие оператора $L^{(\omega)}$ таково, что

$$L^{(\omega)}\left[G\left(\frac{r}{\rho}\eta,\xi;\omega\right)\right]=G\left(\frac{r}{\rho}\eta,\xi\right). \tag{5.7}$$

Таким образом, $L^{(\omega)}\left[v\left(r\eta\right)\right]=u_{\omega}\left(r\eta\right)$, и, поэтому, $v\left(r\eta\right)=u\left(r\eta\right)$. Формула доказана.

5.3 Класс функций, ассоциированных с функцией $\omega\left(x\right)\in\Omega$, и его структурное представление.

Пусть $U_{(\omega)}-$ класс гармонических в области V функций $u(r\eta)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_{S}\left|u_{(\omega)}\left(r\eta\right)\right|dS_{\eta}\right\}<\infty,$$

где
$u_{(\omega)}\left(r\eta\right)=L^{(\omega)}\left[u\left(r\eta\right)\right].$

Теорема 5.4 *1) Класс $U_{(\omega)}$ совпадает с множеством функций $u(r\eta)$, представимых в виде интеграла*

$$u\left(r\eta\right)=\int\limits_{s}G(r\eta,\xi;\omega)\ d\Psi(S_{\xi}) \tag{5.8}$$

где $\Psi(S_{\xi})$ - произвольная функция множества с конечным полным изменением на S; в представлении (5.8) данной функции $u(r\eta)\in U_{(\omega)}$ соответствующая функция $\Psi(\theta)$ может быть определена с помощью предела

$$\Psi\left(S_{\xi}\right)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{S_{\xi}}u_{(\omega)}\left(\rho_{n}\eta\right)d\eta, \tag{5.9}$$

где S_ξ - произвольное подмножество S, $\{\rho_n\}$, $0<\rho_1<\rho_2<...<\rho_n<...,\rho_n\uparrow 1-$ некоторая возрастающая последовательность.

2) Класс $U^*_{(\omega)}\in U_{(\omega)}$ гармонических в области V функций, для которых

$$u_{(\omega)}\left(r\eta\right)\geq 0\ \left(r\eta\in V\right), \tag{5.10}$$

совпадает с множеством функций, представимых в виде (5.8), где функция $\Psi(S_\xi)$ не убывает на S [16].

Доказательство. Предположим, что функция $u(\ r\eta\ )\in U_{(\omega)}$. Тогда, в силу теоремы 5.3, для любого $\rho\in\ (0\,,\,1)$ имеет место представление

$$u\left(r\eta\right)=\int\limits_S G(\frac{r}{\rho}\eta,\xi\ ;\omega)\ d\Psi_\rho(S_\xi)\,,(0\leq r<\rho,\ \xi\in S)\,, \tag{5.11}$$

где

$$\Psi_\rho\left(S_\xi\right)=\int\limits_{S_\xi}u_{(\omega)}\left(\rho\eta\right)d\eta. \tag{5.12}$$

Далее, так как функция $u(r\ \eta\ )\in U_{(\omega)}$, то из (5.12) следует, что

$$\mid\Psi_\rho\left(\rho\right)\mid\leq K,\quad \left|\ \underset{S}{V}\left(\Psi_\rho\right)\right|\leq K\quad (0<\rho<1)$$

где

$$K=\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_S\left|u_{(\omega)}\left(r\eta\right)\right|d\eta\right\}<\infty.$$

Значит, для семейства функций $\Psi=\{\ \Psi_\rho\left(S_\xi\right)\ \}$ $(0<\rho<1)$ выполнены условия первой теоремы Хелли [16] . А потому на S существует вещественная функция $\Psi(S_\xi)$ с конечным полным изменением и такая последовательность $\rho_n\uparrow 1$, что в каждой точке $\eta\in S$

$$\Psi\left(S_\xi\right)=\lim_{k\to\infty}\Psi_{\rho_;}\left(S_\xi\right)=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{S_\xi}u_{(\omega)}\left(\rho_k\eta\right)d\eta.$$

Отсюда, в силу второй теоремы Хелли, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_S G(\frac{r}{\rho_k}\eta,\xi\ ;\omega)\ d\Psi_{\rho_;}(S_\xi)=\int\limits_S G(r\eta,\xi;\omega)\ d\Psi(S_\xi)\ . \tag{5.13}$$

Фиксируя теперь значение $r\eta \in V$, напишем формулу (5.11) , полагая $\rho = \rho_k > r\,(k \geq k_0)$. Переходя после этого в (5.11) к пределу при $k \to \infty$, в силу (5.13) , получим представление (5.8) с функцией $\Psi(S_\xi)$, определяемой из (5.9).

Покажем теперь, что любой интеграл вида (5.8) представляет некоторую функцию из класса $U_{(\omega)}$. В самом деле, гармоничность любой такой функции в области V следует из гармоничности самого ядра

$$(G(r\eta, \xi; \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n r^n G_n\left(\eta, \xi\right), \tag{5.14}$$

для всех значений параметра $\eta \in S$. Далее, так как в силу (5.4),

$$L^{(\omega)}\left[r^k\right] = \frac{r^k}{q_k}\left(k = 0, 1, 2, ...\right),$$

то

$$L^{(\omega)} G\left(r\eta, \xi; \omega\right) = G\left(r\eta, \xi\right). \tag{5.15}$$

Значит, если функция $u(r\,\eta\,)$, представима в виде (5.8), то в силу (5.15), будем иметь:

$$u_{(\omega)}\left(r\eta\right) = L^{(\omega)}\left[u\left(r\eta\right)\right] = \int\limits_{S_\xi} G(r\eta, \xi; \omega)\; d\Psi(S_\xi) \tag{5.16}$$

но так как $G(r\eta, \xi)$ - неотрицательно и для ядра $G(r\eta, \xi)$ выполнено условие:

$$\int\limits_S G(r\eta, \xi; \omega)\; dS = 1 \tag{5.17}$$

то из (5.16) находим

$$\int\limits_S \left|u_{(\omega)}\left(r\eta\right)\right|\; dS\eta \leq \int\limits_S \left|d\Psi\left(S_\xi\right)\right| \quad \left(0 < r < 1\right),$$

при этом, поскольку ее правая часть от r не зависит, то это и означает, что $u(r\eta) \in U_{(\omega)}$. Для каждой функции $u(r\,\eta\,) \in U^*_{(\omega)}$ в представлении (5.8) не убывание функции $\Psi(S_\xi)$ на множестве S, следует из (5.12).

Обратно, если в представлении (5.8) функция $\Psi(S_\xi)$ не убывает, то из (5.8) будет следовать, что $u_{(\omega)}\left(r\eta\right) \geq 0\ \left(r\eta \in V\right)$,т.е. $u(r\,\eta\,) \in U^*_{(\omega)}$.

Пусть U класс гармонических в области V функций $u(r\eta)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_S \mid u\,(r\eta)\mid dS_\eta\right\} < \infty.$$

Согласно теореме 5.4, класс U совпадает с множеством функций, допускающих представление в виде интеграла Стилтьеса

$$\int\limits_S G(r\eta,\xi)\; d\Psi(S_\xi),$$

где $\Psi(S_\xi)$ - произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на S.

Теорема 5.5 *Если функция $\omega\,(x)\in\Omega$ не убывает на [0,1) и $\omega\,(x)\uparrow+\infty$ при $x\uparrow 1$, то*

$$U_{(\omega)}\subset U; \tag{5.18}$$

если же функция $\omega\,(x)\in\Omega$ не возрастает на [0,1) и $\omega\,(x)\downarrow 0$ при $x\uparrow 1$, то

$$U\subset U_{(\omega)}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Пусть $u(r\;\eta\;)\in U_{(\omega)}$. Тогда, согласно теореме 5.4,

$$u\,(r\eta)=\int\limits_s G(r\eta,\xi;\omega)\; d\Psi(S_\xi)\,. \tag{5.20}$$

При этом согласно (5.2) $G\,(r\eta,\xi;\omega)\;\geq\;0\;\;(0\leq r<1,\eta,\xi\in S)$. Далее, в силу (5.17),

$$\int\limits_S G(r\eta,\xi;\omega)\; dS_\xi=1\,,(0\leq r<1,\eta\in S)$$

и потому из (5.20) следует оценка

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_S |u\,(r\eta)|\, dS_\eta\right\}\equiv I\,[u]<\infty. \tag{5.21}$$

Положив $\omega(1) = 0$, можно считать, что функция $\omega(x)$ непрерывная на [0,1]. Как не возрастающая функция конечного изменения, $\omega(x)$ почти всюду на [0,1] обладает производной $\omega'(x) \in L(0,1)$, поэтому (см.[16]) имеет место представление

$$L^{(\omega)}[u(r\eta)] = \int_0^1 u(xr\eta)\ \omega'(x)\,dx \quad (0 \le r < 1,\ \eta \in S).$$

Отсюда, ввиду (5.21), следует оценка

$$\int_S |\ L^{(\omega)}[u(r\eta)]\ |\ dS_\eta \le I[u] \int_0^1 |\omega'(x)|\ dx\ \ (0 \le r < 1),$$

т.е.$u(r\ \eta\ ) \in U_{(\omega)}$. Значит, (5.19) справедливо.

5.4 Проблема моментов на компактной поверхности.

Установим достаточные условия разрешимости проблемы моментов , ассоциированной с функцией $\omega(x) \in \Omega$.

Теорема 5.6 *Пусть функция $\omega(x) \in \Omega$ убывает на [0,1], $\Psi_0(S_\xi)$ - неубывающая ограниченная функция на S. Тогда проблема моментов*

$$c_n(\eta) = \int_S G_n(\eta,\xi)\,d\Psi(S_\xi) \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

где

$$c_n(\eta) = q_n \int_S G_n(\eta,\xi)\,d\Psi_0(S_\xi) \tag{5.22}$$

имеет решение $\Psi(S_\xi) = \Psi_{(\omega)}(S_\xi)$ в классе неубывающих и ограниченных функций.

Доказательство. Образуем гармоническую функцию класса $U_{(\omega)}$

$$u_0(r\eta) = \int_S G(r\eta,\xi;\omega)\ d\Psi_0(S_\xi) \tag{5.23}$$

Так как в рассматриваемом случае $d\Psi_0(S_\xi) \geq 0$, и, согласно (5.5), ядро $G\,(r\eta, \xi; \omega) \geq 0$, то имеем также $u_0\,(r\eta) \geq 0$. Поэтому, согласно теореме 5.4, существует неубывающая ограниченная функция $\Psi_{(\omega)}(S_\xi)$ такая, что

$$u_0\,(r\eta) = \int\limits_s G(r\eta, \xi)\; d\Psi_{(\omega)}(S_\xi)\,. \tag{5.24}$$

Имея в виду разложение (5.14) и формулы (5.23),(5.24), получим, что при любом $\eta \in S$ выполнено:

$$q_n \int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi_0\,(S_\xi) = \int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi_{(\omega)}\,(S_\xi) \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{5.25}$$

Наконец, из (5.22), вытекает:

$$\int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi_{(\omega)}\,(S_\xi) = c_n\,(\eta) \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5.7 *Пусть функция $\omega\,(x) \in \Omega$ не возрастает на [0,1] и $\omega\,(x) \downarrow 0$ при $x \uparrow 1$, а $\Psi_0(S_\xi)$ - функция конечного изменения на S. Тогда проблема моментов*

$$\int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi\,(S_\xi) = \tilde{c}_n\,(\eta) \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

где

$$\tilde{c}_n\,(\eta) = \frac{1}{q_n} \int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi_0\,(S_\xi) \quad , \tag{5.26}$$

имеет решение $\Psi(S) = \tilde{\Psi}_{(\omega)}(S_\xi)$ в классе функций с конечным изменением на S.

Доказательство. Образуем гармоническую функцию класса U

$$\tilde{u}_0\,(r\eta) = \int\limits_S G(r\eta, \xi)\; d\Psi_0(S_\xi)\,. \tag{5.27}$$

Тогда, согласно теореме 5.2 , имеем также $\tilde{u}_0\,(r\eta) \in U^*_{(\omega)}$. Отсюда, в силу теоремы 5.4 , следует существование функции $\Psi(S_\xi) = \tilde{\Psi}_{(\omega)}(S_\xi)$ конечного изменения на S такой, что

$$\tilde{u}_0\,(r\eta) = \int\limits_S G(r\eta, \xi; \omega)\; d\tilde{\Psi}_{(\omega)}(S_\xi)\,. \qquad (5.28)$$

Теперь, имея в виду разложение (5.14) и формулы (5.27), (5.28), найдем что

$$\int\limits_S G_n(\eta, \xi)\; d\Psi_0(S_\xi)\; = q_n \int\limits_S G_n(\eta, \xi)\; d\Psi_{(\omega)}(S_\xi)\,, n = 0, 1, 2, ... \qquad (5.29)$$

Отсюда так же, как и при доказательстве теоремы 5.6 получим, что

$$\tilde{c}_n\,(\eta) = \int\limits_S G_n\,(\eta, \xi)\, d\Psi\,(S_\xi) \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Теорема доказана.

Следствие 5.1. Пусть S- единичная сфера из R^3. Пусть функция $\omega\,(x) \in \Omega$ убывает на [0,1], $\Psi_0(S_\xi)$ - неубывающая ограниченная функция на S. Тогда проблема моментов

$$c_k\,(\eta) = \int\limits_S \eta^k d\Psi\,(S_\xi) \quad (k \in Z^3_+),$$

где

$$c_k\,(\eta) = q_{|k|} \int\limits_S \eta^k d\Psi_0\,(S_\xi) \qquad (5.30)$$

имеет решение $\Psi(S_\xi) = \Psi_{(\omega)}(S_\xi)$ в классе неубывающих и ограниченных функций.

Доказательство. Из формулы (5.25) следует, что

$$G_k\,(\eta, \xi) = \frac{1}{4\pi}\,(2k+1)\;\; P_k\,(\langle\eta, \xi\rangle)\,,\; \langle\eta, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i,$$

P_k -полиномы Лежандра. При этом равенство (5.29) принимает вид

$$\int\limits_S P_n\left(\langle \eta, \xi\rangle\right)\, d\Psi_0(S_\xi) = q_n \int\limits_S P_n\left(\langle\langle \eta, \xi\rangle\rangle\right)\, d\Psi_{(\omega)}(S_\xi)\,, n = 0, 1, 2, ...$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. В итоге имеем

$$\int\limits_S \langle\langle \eta, \xi\rangle\rangle^n\, d\Psi_0(S_\xi) = q_n \int\limits_S \left(\langle \eta, \xi\rangle\right)^n\, d\Psi_{(\omega)}(S_\xi)\,, n = 0, 1, 2, ...$$

Подействуем на правую и левую части последнего равенства оператором $\frac{1}{k_1!...k_n!}\frac{\partial^{|k|}}{\partial\xi^{k_1}...\partial\xi^{k_n}}$. В результате получим требуемое соотношение

$$\int\limits_S \xi^k\, d\Psi_0(S_\xi) = q_n \int\limits_S \xi^k\, d\Psi_{(\omega)}(S_\xi)\,, n = 0, 1, 2, ...$$

Глава 6

Оператор Римана- Лиувилля для функций, гармонических в верхней полуплоскости

6.1 Оператор Римана- Лиувилля и его свойства

Определение 6.1. Скажем, что функция $\omega(x) \in \Omega$, если

1) $\omega(x)$ неотрицательна и непрерывна на $(0, \infty)$;

2) для каждого $\lambda > 0$ существует интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \omega(x)\, dx, \lambda > 0;$$

3) при $x \to \infty$ выполнено условие $\omega(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^{\beta - 1} L(x)$, с некоторым $0 < \beta \leq 1$ и $L(x)$- некоторой медленно растущей функцией [13].

Введем к рассмотрению функцию

$$\Delta(\lambda) = |\lambda| \int_0^\infty e^{-|\lambda| x} \omega(x)\, dx. \tag{6.1}$$

Лемма 6.1 *Функция $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:*

1) определена всюду в $R \backslash \{0\}$;

2) функция $\Delta(\lambda) > 0, \lambda \in R_*$;

3) если функция $\omega(x)$ *не возрастает на* $(0, \infty)$, *то функция* $q(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}$ *- вполне- монотонна в* $(0, \infty)$ *[33].*

Доказательство. Из определения функции $\Delta(\lambda)$ следует равенство

$$\Delta'(\lambda) = \int\limits_0^\infty (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} \omega(x) \, dx.$$

Для интеграла в правой части имеем неравенство:

$$\begin{aligned} &\Delta'(\lambda) = \int\limits_0^\infty (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} \omega(x) \, dx \geq \\ &\geq \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda}} (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} \omega\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) dx - \int\limits_{\frac{1}{\lambda}}^\infty (\lambda x - 1) e^{-\lambda x} \omega\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) dx = \\ &= \int\limits_0^\infty (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} \omega\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\Delta(\lambda)$ - монотонно возрастает на $(0, \infty)$ и, значит, не обращается в ноль. Рассуждения, аналогичные приведенным, показывают что выполняются условия

$$(-1)^{l-1} \frac{d}{d\lambda^l}^{l} (\Delta(\lambda)) \geq 0, l = 2, 3, 4, ...$$

Функция $\frac{1}{\Delta(\lambda)}$ задана на R_*. Установим ее вполне- монотонность. В самом деле: так как функция $\Delta(\lambda)$ - вполне- монотонна, то функция $\Delta(\lambda)$ имеет вполне- монотонную производную. Тогда функция $\frac{1}{\Delta(\lambda)}$ также вполне- монотонна как композиция вполне монотонной функции $\frac{1}{\lambda}$ и функции $\Delta(\lambda)$ с вполне- монотонной производной [33].

Лемма 6.2 *Если функция* $a(\tau)$ *вполне монотонна, т.е.*

$$(-1)^r a^{(r)}(\tau) \geq 0, (\tau > 0, r \in N), \quad ,$$

то интеграл

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|(y+t)} a(|\lambda|) \; e^{i\lambda(x-\varsigma)} d\lambda \; ; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... d\lambda_{\cdot 1} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... d\lambda_{\cdot n} \; ; \end{gathered}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2}; \varsigma = (\varsigma_1, ...\varsigma_n), t = (t_1, ..., t_n),$$
$$e^{i\lambda(x-\varsigma)} = e^{i\lambda_1(x_1-\varsigma_1)}...e^{i\lambda_n(x_n-\varsigma_n)},$$

при каждом фиксированном значении параметров ς, t *сходится к неотрицательной функции, гармонической в верхней полуплоскости* $y>0$ *при этом функция* $e^{-|\lambda|(y+t)}a(|\lambda|)e^{-i\lambda\varsigma}$ *является ее образом Фурье.*

Доказательство. Согласно теореме С. Н. Бернштейна [33], функция $a(|\lambda|)$ является преобразованием Лапласа распределения вероятностей F, сосредоточенного на $[0, \infty)$. Таким образом,

$$a(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t), \lambda \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$P(x-\varsigma, y+t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|(y+t)} e^{i\lambda(x-\varsigma)} d\lambda. \tag{6.2}$$

Интеграл в правой части (6.2) считается в конечном виде:

$$P(x-\varsigma, y+t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{y+t}{\left[|x-\varsigma|^2 + (y+t)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Следовательно, ядро $P(x-\varsigma, y+t)$ неотрицательно, суммируемо по переменной ς [16]. Из теоремы Фубини следует, что функция

$$\int_0^\infty P(x-\varsigma, y+t) dF(t)$$

неотрицательна, суммируема по аргументам (x,y,t). Нетрудно видеть, что интеграл в правой части (6.2) сходится равномерно по аргументу t. Интегрируя под знаком интеграла в (6.2), вспоминая определение функции $a(\lambda)$, найдем равенство

$$\int_0^\infty P(x-\varsigma, y+t) dF(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|(y+t)} e^{i\lambda(x-\varsigma)} a(|\lambda|) d\lambda.$$

Из установленного тождества следует, что интеграл (6.2) сходится к неотрицательной функции, суммируемой по всем аргументам, и является интегралом Фурье этой функции по аргументу x. Теорема доказана.

Введем обобщенный оператор Римана- Лиувилля $L^{(\omega)}$ для верхней полуплоскости:

$$L^{(\omega)}\left[\varphi\left(y\right)\right] = -\frac{d}{dy}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi\left(t+y\right)dF\left(t\right).$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что операторы $D\,,\bar{D}$ и $L^{(\omega)}$ коммутируют. Следовательно,

$$D\bar{D}\,\left(L^{(\omega)}[u]\right) = L^{(\omega)}\left[D\bar{D}\,\left(u\right)\right] = 0.$$

Теорема доказана.

6.2 Обобщенная формула Пуассона, ассоциированная с функцией $\omega\left(x\right) \in \Omega$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$P(x-\varsigma, y;\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|\lambda|y}q\left(|\lambda|\right)\,e^{i\lambda(x-\varsigma)}d\lambda, \tag{6.3}$$

в котором функция $q(|\lambda|)$ определена формулой $q\left(|\lambda|\right) = \Delta^{-1}\left(|\lambda|\right)$. Интеграл в правой части (6.3) сходится для всех $(x,\, y)$ из верхней полуплоскости. В самом деле, как следует из определения класса Ω, для функции $q\left(|\lambda|\right)$ имеет место асимптотическое равенство [16]

$$q\left(|\lambda|\right) \sim \frac{\lambda^{\beta-1}}{L\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Таким образом, определен интеграл Лапласа (6.3). Следовательно, функция $P(x-\varsigma, y;\omega)$ является гармонической в верхней полуплоскости D.

Замечание 6.1. В случае, когда функция $\omega\left(x\right) \in \Omega$ не возрастает на $[0,\infty)$, семейство гармонических функций $P(x-\varsigma, y;\omega)$ удовлетворяет

условию
$$P(x-\varsigma, y; \omega) \geq 0, \ x \in D, \tag{6.4}$$

Доказательство. Согласно лемме 6.1 функция $q\left(\lambda\right)$ - вполне- монотонна. Воспользовавшись теоремой 2.1, доказательство завершим.

Теорема 6.1 *.Если функция $u = u(x,y)$ гармоническая в верхней полуплоскости D, то функция $L^{(\omega)}\ [u(x,y)]$ -гармоническая в той же области D . Для любого $\rho\ \ (0 < \rho < \infty)$ справедлива интегральная формула*

$$u\left(x,y\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y-\rho, \omega\right)\ u_{(\omega)}\left(\varsigma,\rho\right) d\varsigma \tag{6.5}$$

$$\left(d\varsigma = d\varsigma_1 ... d\varsigma_{n-1};\ (x,y) \in D_r = \left\{(x,y) : y > r\right\}\ ,\ 0 \leq r < \rho\right),$$

где

$$u_\omega\left(x,y\right) \equiv L^{(\omega)}\left[u\left(x,y\right)\right]\ .$$

Доказательство. В силу теоремы 2.2 функция $L^{(\omega)}\left[u\left(x,y\right)\right]$ гармоническая в области D, и, поэтому она может быть представлена в виде интеграла:

$$\int\limits_0^{\infty} u\left(x,y+t\right) dF\left(t\right).$$

Указанный интеграл может быть преобразован при помощи формулы Пуассона к виду

$$\int\limits_0^{\infty} u\left(x,y+t\right) dF\left(t\right) = \int\limits_0^{\infty} P\left(x-\varsigma,\rho,\Delta\right)\ u\left(\varsigma,\rho\right) d\varsigma. \tag{6.6}$$

Для ядра $P(x-\varsigma, y-\rho; \Delta)$ справедливо представление

$$P(x-\varsigma, y-\rho; \Delta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|(y-\rho)} \Delta\left(|\lambda|\right)\ e^{i\lambda(x-\varsigma)} d\lambda,$$

в котором правая часть имеет смысл, ввиду определения класса Ω.

Для ρ $(0 < \rho < 1)$ интеграл

$$P(x-\varsigma, y-\rho; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|(y-\rho)} q\left(|\lambda|\right)\, e^{i\lambda(x-\varsigma)} d\lambda, \tag{6.7}$$

сходится равномерно относительно параметра ς при любом фиксированном $(x, y) \in D_r$. Используя формулу для преобразования Фурье произведения [16], будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y-\rho, \omega\right)\; u_{(\omega)}\left(\varsigma, \rho\right) d\varsigma = F^{-1}\left[F\left(P\right)\; F\left(u_{(\omega)}\right)\right]. \tag{6.8}$$

Из формулы (6.7) найдем

$$F[P] = e^{-|\lambda|(y-\rho)} q\left(|\lambda|\right) e^{-i\lambda\varsigma}.$$

Аналогично, из формулы (6.8) установим равенство

$$F[u_{(\omega)}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|\rho} \Delta\left(|\lambda|\right) e^{i\lambda(\varsigma-\sigma)} u\left(\sigma,\, \rho\right) d\sigma.$$

Подставив найденные значения $F[P]$ и $F[u_{(\omega)}]$ в формулу (6.6), найдем требуемое равенство. Вспоминая интегральную формулу Пуассона для полупространства [18], имеющую вид

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y-\rho\right)\; u\left(\varsigma, \rho\right) d\varsigma = u\left(x, y\right),$$

доказательство теоремы закончим.

6.3 Класс функций, ассоциированных с функцией $\omega\left(x\right) \in \Omega$, и его структурное представление.

Пусть $U_{(\omega)}$– класс гармонических в области D функций $u(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho<\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid u_{(\omega)}\left(\varsigma,\rho\right) \ \mid d\,\varsigma\right\}<+\infty,$$

где
$u_{\omega}\left(x,y\right)\equiv L^{(\omega)}\left[u\left(x,y\right)\right].$

Теорема 6.2 1) *Если функция* $u=u(x,y)$ *из класса* $U_{(\omega)}$, *то функция* $u\left(x,y\right)$ *представляется в виде интеграла Стильтьеса* [16]

$$u\left(x,y\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(x-\varsigma,y;\omega\right)\ \ d\Psi\left(\varsigma\right), \tag{6.9}$$

где $\Psi(\varsigma)$ *- произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на* $R^{\ n}$ *; в представлении (6.9) данной функции* $u\left(x,y\right)\in U_{(\omega)}$ *соответствующая функция* $\Psi(\varsigma)$ *может быть определена с помощью предела*

$$\Psi\left(\varsigma\right)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\varsigma}u\left(\eta,\rho_{m}\right)d\eta, \tag{6.10}$$

где $\left\{\rho_{m}\right\}$, $\rho_{1}>\rho_{2}>...>\rho_{m}>...,\rho_{m}\uparrow 0-$ *некоторая убывающая последовательность.*

Обратно, *если* $\Psi(\varsigma)$ *- произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на* R^{n}, *то интеграл Стильтьеса*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(x-\varsigma,y;\omega\right)\ \ d\Psi\left(\varsigma\right),$$

определяет гармоническую функцию из класса $U_{(\omega)}$.

Если функция $u(x,y)$ *из класса* $U_{(\omega)}^{*}\subset U_{(\omega)}$ *гармонических в области* D *функций, для которых*

$$u_{\omega}\left(x,y\right)\equiv L^{(\omega)}\left[u\left(x,y\right)\right]\geq 0,(x,y)\in D,$$

то функция $u\left(x,y\right)$ *представима в виде (6.9), где функция* $\Psi(\varsigma)$ *не убывает на* R^{n}*,т.е.* $\Psi\left(\varsigma_{1}\right)\leq\Psi\left(\varsigma_{2}\right)$ *как только* $\varsigma_{i}^{1}\leq\varsigma_{i}^{2},i=1,...,n.$

Обратно, если $\Psi(\tau,\theta)$ *- произвольная вещественная функция неубывающая на* R^{n}, *то интеграл Стильтьеса*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y; \omega\right)\ d\Psi\left(\varsigma\right),$$

определяет гармоническую функцию из класса $U^*_{(\omega)}$.

Доказательство. Предположим, что функция $u\left(x,y\right) \in U_{(\omega)}$. Тогда, в силу формулы (6.5), для любого $\rho \in\ (0\,,\,\infty)$ имеет место представление

$$u\left(\ x,y\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y-\rho; \omega\right)\ d\Psi_{\rho}\left(\varsigma\right), (x,y) \in D_r\quad, \tag{6.11}$$

где

$$\Psi_{\rho}\left(\varsigma\right) = \int\limits_{-\infty}^{\varsigma} u_{(\omega)}\left(\eta,\rho\right) d\eta.$$

Далее, так как функция $u\left(x,y\right) \in U_{(\omega)}$, то из (6.11) следует, что

$$\mid \Psi_{\rho}\left(\varsigma\right) \mid \leq K, \quad \left| \underset{R^n}{V}\left(\Psi_{\rho}\right) \right| \leq K \left(0<\rho<\infty\right)$$

где

$$K = \sup_{0<\rho<\infty}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid u_{(\omega)}\left(\varsigma,\rho\right)\ \mid d\,\varsigma \right\} < +\infty \quad .$$

Значит, для семейства функций $\Psi = \{\ \Psi_{\rho}\left(\varsigma\right)\ \}\ \ (0<\rho<\infty)$ выполнены условия первой теоремы Хелли [16] . А потому на R^n существует вещественная функция $\Psi(\varsigma)$ с конечным полным изменением и такая последовательность $\rho_n \uparrow 0$, что в каждой точке R^n

$$\Psi\left(\varsigma\right) = \lim_{k\to\infty}\Psi_{\rho_;}\left(\varsigma\right) = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\varsigma} u\left(\eta,\rho_k\right) d\eta.$$

Отсюда, в силу второй теоремы Хелли, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y-\rho_k, \omega\right)\ d\Psi_{\rho_k}(\varsigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma, y, \omega\right)\ d\Psi(\varsigma). \tag{6.12}$$

Фиксируя теперь значение $(x, y) \in D$, напишем формулу (6.11) , полагая $\rho = \rho_k > r \ \ (k \geq k_0)$. Переходя после этого в (6.11) к пределу при $k \to \infty$, в силу (6.12) , получим представление (6.9) с функцией $\Psi(\varsigma)$, определяемой из (6.12).

Покажем теперь, что любой интеграл вида (6.11) представляет функцию из класса $U_{(\omega)}$. В самом деле, гармоничность любой такой функции в области D следует из гармоничности самого ядра $P(x-\varsigma, y; \omega)$ для всех значений параметра $\varsigma \in R$. Далее в силу (6.3) имеем равенство

$$L^{(\omega)} P(x - \varsigma, y; \omega) = P(x - \varsigma, y). \tag{6.13}$$

Значит, если функция $v\,(x, y)$, представима в виде (6.9) ,то в силу (6.13) получим:

$$v_{(\omega)}\,(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,(x - \varsigma, y) \ \ d\Psi_0\,(\varsigma)\,, z \in D \quad . \tag{6.14}$$

Учитывая, что $P(x - \varsigma, y)$ - неотрицательно и для ядра $P(x - \varsigma, y)$ выполнено условие:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,(x - \varsigma, y) \ \ d\varsigma = 1 \quad ,$$

из (6.14) находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\ v_{(\omega)}\,(\varsigma, \rho)\ \right|\ d\varsigma \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\ d\Psi\,(\varsigma)\ \right| \quad (0 < \rho < 1)\,,$$

при этом поскольку ее правая часть от ρ не зависит, то это и означает, что $v_\omega(x, y\ ) \in U_{(\omega)}$.

То, что для каждой функции $u(\ x, y\ ) \in U^*_{(\omega)}$ в представлении (6.9) функция $\Psi(\varsigma)$ не убывает, следует из (6.10) .

Обратно, если в представлении (6.9) функция $\Psi(\varsigma)$ не убывает на R, то из (6.10) будет следовать, что

$$v_{(\omega)}\,(x, y) \geq 0 \ \ ((x, y) \in D)\,,$$

т.е. $v\,(x, y) \in U^*_{(\omega)}$.

Пусть $U-$ класс гармонических в области D функций $u = u(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho<\infty}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mid u\left(\varsigma,\rho\right) \mid d\,\varsigma \right\} < +\infty \quad .$$

Согласно теореме 6.4, для любой функция $u(\ x,y\ )$ из класса U функция $u\left(x,y\right)$ допускает представление в виде интеграла Стильтьеса

$$u\left(x,y\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma,y\right) \ d\Psi\left(\varsigma\right),$$

где $\Psi(\theta)$ - произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на R^n.

Теорема 6.3 *Если функция* $\omega\left(x\right) \in \Omega$ *не возрастает на* $[0,\infty)$ *и функция* $u(\ x,y\ ) \in U_{(\omega)}$, *то*

$u\left(x,y\right) \in U$;

если же функция $\omega\left(x\right) \in \Omega$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *;*

$\omega\left(0\right) = 0$ **,** $\omega\left(x\right) \uparrow \omega\left(\infty\right)$ *при* $x \uparrow \infty$,

и функция $u(\ x,y\ ) \in U$, *то* $u(x,y) \in U_{(\omega)}$.

Доказательство. Пусть $u(\ x,y\ ) \in U_{(\omega)}$. Тогда, согласно теореме 6.4

$$u(x,y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma,y\,;\omega\right) \ d\Psi\left(\varsigma\right) \quad . \tag{6.15}$$

При этом, согласно (6.4)

$$P\left(x-\varsigma,y;\omega\right) \geq 0 \quad \left(x,y\right) \in D, \varsigma \in R^n.$$

Далее, непосредственным интегрированием устанавливается тождество:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(x-\varsigma,y\,;\omega\right) \ d\varsigma = \omega\left(\infty\right) \quad ,$$

и потому из (6.16) следует оценка

$$\sup_{0<\rho<\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \mid u_{(\omega)}(\varsigma, \rho) \mid d\,\varsigma\} \equiv I[u] < +\infty \quad . \qquad (6.16)$$

Как неубывающая функция конечного изменения, $\omega(x)$ почти всюду на $[0,\infty)$ обладает производной $\omega'(x) \in L(0,\infty)$ **,** поэтому имеет место представление

$$L^{(\omega)}[u(x,y)] = \int_{0}^{\infty} u(x, y+t)\ \omega'(t)\, dt \quad ((x,y) \in D)\,.$$

Отсюда, ввиду (6.16), следует оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid u_{(\omega)}(\varsigma,\rho) \mid d\varsigma \le \sup_{0<\rho<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mid u(\varsigma,\rho) \mid d\varsigma \int_{0}^{\infty} \omega'(t)\, dt\,,\ 0<\rho<\infty \quad .$$

Таким образом, $u(\ z, \bar{z}\ ) \in U_{(\omega)}$. Значит, (6.15) справедливо.

6.4 Функциональные множители для преобразования Фурье- Стильтьеса, ассоциированные с функцией $\omega(x) \in \Omega$.

Ниже устанавливаются достаточные условия разрешимости проблемы функциональных множителей для преобразований Фурье- Стильтьеса. Мы выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $\Delta(|\lambda|)$ для того, чтобы произведение $G(\lambda) = \Delta(|\lambda|)\, F(\lambda)$ было преобразованием Фурье- Стильтьеса некоторой меры $g(x)$ всякий раз, когда $F(\lambda)$ представляет собой преобразование Фурье- Стильтьеса некоторой меры $f(x)$.

Теорема 6.4 *Пусть функция $\omega(x) \in \Omega$ не возрастает на $(0,\infty)$, $\Psi_0(\varsigma)$ -неубывающая ограниченная функция на R^n, тогда проблема функциональных множителей*

$$F(\lambda) = \int_{R^{\mathrm{n}}} e^{-i\lambda\varsigma}\ d\Psi(\varsigma)\,,$$

где

$$F\left(\lambda\right)=\Delta^{-1}\left(\left|\lambda\right|\right)\int\limits_{R^n}e^{-i\lambda\varsigma}\ \ d\Psi_0\left(\varsigma\right), \qquad (6.17)$$

имеет решение $\Psi(\varsigma) = \Psi_{(\omega)}(\varsigma)$ *в классе неубывающих и ограниченных функций.*

Доказательство. Образуем гармоническую функцию

$$u_{\ 0}\left(\ x,y\right)\ \ =\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(x-\varsigma,y;\omega\right)\ \ d\Psi_0\left(\varsigma\right)\quad . \qquad (6.18)$$

Так как в рассматриваемом случае $d\Psi_0(\varsigma)\geq 0$ и

$$P\left(x-\varsigma,y;\omega\right)\geq 0,\left(x,y\right)\in D,\varsigma\in R^n,$$

то имеем также $u_0\left(x,y\right)\geq 0$.

Далее, по теоремам 6.4 и 6.5 существует неубывающая ограниченная функция $\Psi_{(\omega)}(\theta)$ такая, что

$$u_{\ 0}\left(\ x,y\right)\ \ =\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(x-\varsigma,y\right)\ \ d\Psi_{(\omega)}\left(\varsigma\right)\quad . \qquad (6.19)$$

Имея ввиду разложения (6.18),(6.19) и формулу для образа Фурье

$$F[P\left(x-\varsigma,y;\omega\right)]=e^{-|\lambda|y}q\left(\left|\lambda\right|\right)e^{-i\lambda\varsigma},F[P\left(x-\varsigma,y\right)]=e^{-|\lambda|y}e^{-i\lambda\varsigma},$$

найдем, что при любом $\lambda\in R^n$ выполняется равенство:

$$\int\limits_{R^n}e^{-|\lambda|y}e^{-i\lambda\varsigma}\,d\Psi_{(\omega)}\left(\varsigma\right)=\int\limits_{R^n}\ e^{-|\lambda|y}q\left(\left|\lambda\right|\right)e^{-i\lambda\varsigma}d\Psi_0\left(\varsigma\right).$$

Применив равенство $q\left(\left|\lambda\right|\right)=\Delta^{-1}\left(\left|\lambda\right|\right)$, доказательство закончим.

Теорема 6.5 *Пусть функция* $\omega\left(x\right)\in\Omega$ **,** $\omega\left(0\right)=0$ **,** $\omega\left(x\right)\uparrow\omega\left(\infty\right)$ *при* $x\uparrow\infty$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *;* $\Psi_0(\varsigma)$ *- ограниченная функция конечного изменения на* R^n, *тогда проблема функциональных множителей*

$$\tilde{F}(\lambda) = \int\limits_{R^n} e^{-i\lambda\varsigma}\ d\Psi(\varsigma),$$

где

$$\tilde{F}(\lambda) = \Delta(|\lambda|) \int\limits_{R^n} e^{-i\lambda\varsigma}\ d\Psi_0(\varsigma), \tag{6.20}$$

имеет решение $\Psi(\varsigma) = \Psi_{(\omega)}(\varsigma)$ *в классе ограниченных функций конечного изменения на* R^n.

Доказательство. Образуем гармоническую функцию класса U

$$\tilde{u}_0(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x - \varsigma, y)\ d\Psi_0(\varsigma) \quad . \tag{6.21}$$

Тогда, согласно теореме 6.5, имеем также $\tilde{u}_0(x, y) \in U_{(\omega)}$. Отсюда, в силу теоремы 6.4 , следует существование функции $\Psi(\varsigma) = \tilde{\Psi}_{(\omega)}(\varsigma)$ конечного изменения на M такой, что

$$\tilde{u}_0(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x - \varsigma, y; \omega)\ d\tilde{\Psi}_{(\omega)}(\varsigma) \quad . \tag{6.22}$$

Имея в виду разложения (6.19),(6.20) и формулу для образа Фурье

$$F[P(x - \varsigma, y; \omega)] = e^{-|\lambda| y} q(|\lambda|)\ e^{-i\lambda\varsigma}, F[P(x - \varsigma, y)] = e^{-|\lambda| y} e^{-i\lambda\varsigma},$$

найдем, что при любом $\lambda \in R^n$ выполняется равенство:

$$\int\limits_{R^n} e^{-|\lambda| y} e^{-i\lambda\varsigma}\, d\Psi_0(\varsigma) = \int\limits_{R^n} e^{-|\lambda| y} q(|\lambda|)\ e^{-i\lambda\varsigma} d\Psi_{(\omega)}(\varsigma). \tag{6.23}$$

Отсюда так же, как и при доказательстве теоремы 6.6, получаем утверждение теоремы.

Глава 7

Интегральные преобразования Фурье с неразделенными переменными на компактах из R^n

7.1 Постановка задачи

В литературе хорошо известна связь между функцией Грина и соответствующей собственной функцией [31]. Мы предлагаем более прямой подход по применению функции Грина в теории интегральных преобразований. Приведем два примера. Первый связан с интегральной формулой Пуассона для круга, имеющей вид

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} f(\theta)d\theta$$

Разложение ядра Пуассона в ряд по степеням r имеет вид

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^n \cos k(\varphi-\theta).$$

Конечным интегральным преобразованием периодической на отрезке $[0, 2\pi]$ функции $f(\varphi)$ назовем

$$\hat{f}_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos k(\theta - \varphi) f(\theta) d\theta.$$

Для обратного преобразования Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$ имеем выражение

$$f(\varphi) = \hat{f}_0 + \lim_{r\to 1} 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \hat{f}_k.$$

Рассматривая интегральную формулу Пуассона для полуплоскости, получаем соответствующий континуальный аналог: интегральным преобразованием Фурье на действительной оси функции $f(x)$ назовем

$$\hat{f}(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda(x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Для обратного преобразования Фурье на действительной оси имеем выражение

$$f(x) = \lim_{y\to 0}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda y}\hat{f}(x,\lambda)d\lambda.$$

Пусть $V-$ ограниченная звездообразная относительно начала координат область из R^n, граница которой S- регулярная по Ляпунову поверхность [17]. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, x \equiv (x_1, ..., x_n) \in V \tag{7.1}$$

$$\lim_{x\to\xi} u(x) = f(\xi), \xi \in S, \tag{7.2}$$

для произвольной непрерывной на поверхности S функции $f = f(\xi)$. Метод функций Грина [17] позволяет выразить решение задачи Дирихле (7.1),(7.2) в форме поверхностного интеграла

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi) f(\xi) dS_\xi, \tag{7.3}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина.

Заметим, что область V допускает параметризацию

$$V = \{x : x = r\eta; \eta \in S,\ 0 \leq r < 1\}.$$

При этом оператор Лапласа запишется в виде:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\eta^2}\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\Delta_\eta u, \tag{7.4}$$

здесь Δ_η - оператор Лапласа на поверхности S, а

$$\eta^2 = \eta_1^2 + ... + \eta_n^2.$$

Рассмотрим функцию Грина $G(r\eta, \xi)$. Как известно, эта функция вещественно- аналитична по всем своим аргументам [17], в частности, она аналитична по r. Запишем разложение функции Грина в степенной ряд по переменной r:

$$G(r\eta, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\eta, \xi) r^k. \tag{7.5}$$

В соответствии с интегральной формулой (7.3) имеем теорему разложения.

Теорема 7.1 *Пусть функция $f = f(\eta)$ определена и непрерывна на поверхности S, тогда для каждой точки $\eta \in S$, справедлива формула разложения*

$$f(\eta) = \lim_{r \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int\limits_S G_k(\eta, \xi) f(\xi) dS_\xi. \tag{7.6}$$

Интегральное тождество (7.6) позволяет ввести прямое и обратное конечные интегральные преобразования Фурье на поверхности S.

7.2 Прямое и обратное преобразования Фурье на S

Определение 7.1. Конечным интегральным преобразованием Фурье на поверхности S непрерывной функции $f(\xi)$ назовем

$$F_k[f](\eta) = \int\limits_S G_k(\eta, \xi) f(\xi) dS_\xi \equiv \hat{f}_k(\eta). \tag{7.7}$$

Обратным интегральным преобразованием Фурье на поверхности S назовем выражение

$$F_k^{-1}[\hat{f}_k](\eta) = \lim_{r\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \hat{f}_k(\eta) \equiv f(\eta). \tag{7.8}$$

Формулу (7.8) можно рассматривать, как формулу обобщенного суммирования Пуассона на поверхности S.

Теорема 7.2 *Если функция $f = f(\eta)$ дважды непрерывно дифференцируема на поверхности S, то справедливо тождество*

$$F_k[\xi^2\Delta_\xi(f)](\eta) = -k(k+n-2)\hat{f}_k(\eta). \tag{7.9}$$

Доказательство. Пусть функция $u = u(r\eta)$ служит решением задачи Дирихле (7.1),(7.2), т.е.

$$u(r\eta) = \int\limits_S G(r\eta,\xi) f(\xi) dS_\xi. \tag{7.10}$$

Нетрудно заметить, что функция $v(r\eta) = \eta^2\Delta_\eta[u](r\eta)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta v = 0, x \equiv (x_1, ..., x_n) \in V$$

$$\lim_{x\to\xi} v(x) = \xi^2\Delta_\xi[f](\xi), \xi \in S.$$

Другими словами, выполняется тождество:

$$\eta^2\Delta_\eta[u](r\eta) = \int\limits_S G(r\eta,\xi)\xi^2\Delta_\xi[f](\xi) dS_\xi. \tag{7.11}$$

Вместе с тем, из интегрального представления (7.10) следует равенство

$$\eta^2\Delta_\eta[u](r\eta) = \int\limits_S \eta^2\Delta_\eta[G](r\eta,\xi) f(\xi) dS_\xi. \tag{7.12}$$

Воспользовавшись гармоничностью функции u, имеем равенство

$$\eta^2\Delta_\eta[u](r\eta) = -\frac{1}{r^{n-3}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}).$$

Приравняем правые части в формулах (7.11) и (7.12):

$$\int\limits_S G(r\eta,\xi)\xi^2\Delta_\xi[f](\xi)dS_\xi = -\int\limits_S \frac{1}{r^{n-3}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial G}{\partial r}\right](r\eta,\xi)f(\xi)dS_\xi.$$

Применив разложение функции Грина в ряд (7.5),получаем требуемое тождество.

Пример 7.1. Пусть поверхность S есть единичная сфера из R^3. Оператор Лапласа на сфере принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

где (θ,φ) - сферические координаты. Функция Грина задачи Дирихле для шара имеет вид

$$G\left(r\eta,\xi\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{\left(1-2r\left\langle\eta,\xi\right\rangle+r^2\right)^{3/2}},$$

здесь $\langle\eta,\xi\rangle = \eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2+\eta_3\xi_3$. Ее разложение в ряд Тейлора записывается в форме [17]

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{\left(1-2r\left\langle\eta,\xi\right\rangle+r^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ P_k\left(\langle\eta,\xi\rangle\right), \tag{7.13}$$

при этом $P_k\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)$ - полиномы Лежандра [17].

Конечным интегральным преобразованием Фурье на сфере S непрерывной функции $f(\xi)$ назовем

$$F_k[f](\eta) = \frac{(2k+1)}{4\pi}\int\limits_S P_k\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)f(\xi)dS_\xi \equiv \hat{f}_k(\eta). \tag{7.14}$$

Обратным интегральным преобразованием Фурье на сфере S назовем выражение

$$F_k^{-1}[\hat{f}_k](\eta) = \lim_{r\to1}\sum_{k=1}^{\infty} r^k\hat{f}_k(\eta) \equiv f(\eta). \tag{7.15}$$

Основное тождество интегрального преобразования оператора Лапласа на сфере имеет вид

$$F_k[\Delta_\xi(f)](\eta) = -k(k+1)\hat{f}_k(\eta).$$

Глава 8

Преобразования Фурье с неразделенными переменными на некомпактных поверхностях.

8.1 Постановка задачи

Будем считать, что неограниченная область V из R^{n+1} имеет гладкую границу S, если

$$V = \left\{ (x_1, ..., x_n, y) \in R^{n+1} : y > \rho\left(x_1, ..., x_n\right), x \in R^n \right\}$$

где ρ - функция класса $C^1\left(R^n\right)$. Поверхность

$$S = \left\{ (x, y) \in R^{n+1} : y = \rho\left(x\right) \quad \right\} -$$

регулярная по Ляпунову поверхность [17]. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, (x, y) \equiv (x_1, ..., x_n, y) \in V \tag{8.1}$$

$$\lim_{(x,y)\to S} u(x, y) = f(\xi, \eta), (\xi, \eta) \equiv (\xi_1, ..., \xi_n, \eta) \in S, \tag{8.2}$$

для произвольной непрерывной на поверхности S функции $f = f\left(\xi, \eta\right)$, удовлетворяющей условиям регулярности на бесконечности:

$$f \to 0, \quad r \to \infty r^n \left|gradf\right| < c, \quad r \to \infty r = \left\|\xi\right\|^2 + \eta^2 \tag{8.3}$$

где c- некоторая постоянная. В случае известной функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ [17] решение задачи Дирихле (8.1),(8.2) можно выразить в форме поверхностного интеграла

$$u(x,y) = \int\limits_S G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}, \tag{8.4}$$

Заметим, что область V допускает параметризацию

$$V{=}\{(x{,}y){:}(x{,}y){=}(p,q+\tau),(p,q)\in S,\ \tau>0\}. \tag{8.5}$$

При этом оператор Лапласа запишется в виде:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \Delta_{p,q} u, \tag{8.6}$$

здесь $\Delta_{p,q}$ - оператор Лапласа на поверхности S.

Рассмотрим функцию Грина $G(p,q+\tau;\xi,\eta)$. Как известно, эта функция вещественно- аналитична по всем своим аргументам [17], в частности, она аналитична по τ. Запишем представление функции Грина в виде интеграла Лапласа:

$$G(p,q+\tau;\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} G^*\left(p,q;\xi,\eta;\lambda\right)d\lambda, \tag{8.7}$$

Здесь $G^*\left(p,q;\xi,\eta;\lambda\right)$ - оригинал Лапласа функции $G(p,q+\tau;\xi,\eta)$. В соответствии с интегральной формулой (8.4) имеем теорему разложения.

Теорема 8.1 *Пусть функция $f = f(\xi,\eta)$ определена и непрерывна на поверхности S, тогда для каждой точки $(p,q)\in S$, справедлива формула разложения*

$$f(p,q) = \lim_{\tau\to 0}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\left(\int\limits_S G^*(p,q;\xi,\eta;\lambda)f(\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}\right)d\lambda. \tag{8.8}$$

Интегральное тождество (8.8) позволяет ввести прямое и обратное интегральные преобразования Фурье на некомпактной поверхности S.

8.2 Прямое и обратное интегральные преобразования Фурье на S

Определение 8.1. Интегральным преобразованием Фурье на поверхности S непрерывной функции *f*, удовлетворяющей условиям регулярности (8.3) на бесконечности, назовем

$$F[f](p,q,\lambda) = \int\limits_S G(p,q;\xi,\eta;\lambda) f(\xi,\eta) dS_{\xi,\eta} \equiv \hat{f}(p,q;\lambda). \tag{8.9}$$

Обратным интегральным преобразованием Фурье на поверхности S назовем выражение

$$F^{-1}[\hat{f}](p,q) = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} \hat{f}(p,q;\lambda) d\lambda \equiv f(p,q). \tag{8.10}$$

Формулу (8.10) можно рассматривать, как континуальный аналог формулы обобщенного суммирования Пуассона на поверхности S.

Теорема 8.2 *Если функция $f = f(\xi,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируема на поверхности S, а функция $\Delta_{\xi,\eta}(f)$ удовлетворяет условиям регулярности (8.3) на бесконечности, то справедливо тождество*

$$F[\Delta_{\xi,\eta}(f)](p,q,\lambda) = -\lambda^2 \hat{f}(p,q,\lambda). \tag{8.11}$$

Доказательство. Пусть функция $u = u(p,q+\tau)$ служит решением задачи Дирихле (8.1),(8.2), т.е.

$$u(p,q+\tau) = \int\limits_S G(p,q+\tau;\xi,\eta) f(\xi,\eta) dS_{\xi,\eta}. \tag{8.12}$$

Нетрудно заметить, что функция $v(p,q+\tau) = \Delta_{p,q}[u](p,q+\tau)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta v = 0, (p,q+\tau) \in V$$

$$\lim_{\tau\to 0} v(p,q+\tau) = \Delta_{p,q}[f](p,q),$$

когда $(p,q) \in S$.

Другими словами, выполняется тождество:

$$\Delta_{p,q}[u](p, q+\tau) = \int\limits_S G(p, q+\tau; \xi, \eta)\Delta_{\xi,\eta}[f](\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}. \tag{8.13}$$

Вместе с тем, из интегрального представления (8.12) следует равенство

$$\Delta_{p,q}[u](p, q+\tau) = \int\limits_S \Delta_{p,q}[G](p, q+\tau; \xi, \eta)f(\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}. \tag{8.14}$$

Воспользовавшись гармоничностью функции u, получим равенство

$$\Delta_{p,q}[u](p, q+\tau) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}.$$

Приравняем правые части в формулах (8.13) и (8.14):

$$\int\limits_S G(p, q+\tau; \xi, \eta)\Delta_{\xi,\eta}[f](\xi,\eta)dS_{\xi,\eta} = -\int\limits_S \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(p, q+\tau; \xi, \eta)f(\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}.$$

Применив представление функции Грина в виде интеграла Лапласа

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\left(\int\limits_S G^*(p,q;\xi,\eta;\lambda)\Delta_{\xi,\eta}[f](\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}\right)d\lambda =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda\tau}\left(\int\limits_S G^*(p,q;\xi,\eta;\lambda)f(\xi,\eta)dS_{\xi,\eta}\right)d\lambda,$$

ввиду теоремы единственности преобразования Лапласа заключаем, что доказываемое тождество справедливо.

Будем считать, что неограниченная область V из R^{n+1} есть полупространство

$$V = \left\{ (x_1, ..., x_n, y) \in R^{n+1} : y > 0 \quad \right\}. \tag{8.15}$$

Решение задачи Дирихле (8.1),(8.2) выражается формулой Пуассона [17]

$$u(x,y) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\ \pi^{-\frac{n+1}{2}} \int\limits_{y=0} \frac{y}{\left[(x-\xi)^2 + y^2\right]^{\frac{n+1}{2}}} f(\xi)d\xi. \tag{8.16}$$

При этом оператор Лапласа запишется в виде:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta_\xi u, \tag{8.17}$$

здесь

$$\Delta_\xi u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2}.$$

Запишем представление функции Грина в виде интеграла Лапласа:

$$G(x, y; \xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}} e^{-\lambda\, y} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\lambda \left|x - \xi\right|\right)}{\left|x - \xi\right|^{\frac{n-2}{2}}} d\lambda, \tag{8.18}$$

$J_{\frac{n-2}{2}}\left(\lambda \left|x - \xi\right|\right)$ - цилиндрическая функция I рода [19].

В соответствие с интегральной формулой (8.8) имеем теорему разложения:

$$f(x) = \lim_{\tau \to 0} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{R^n} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\lambda \left|x - \xi\right|\right)}{\left|x - \xi\right|^{\frac{n-2}{2}}} f\left(\xi\right) d\xi \right) d\lambda,$$

Прямое и обратное преобразования Фурье с неразделенными переменными (8.9), (8.10) принимают вид

$$F\left[f\right](x, \lambda) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{R^n} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\lambda \left|x - \xi\right|\right)}{\left|x - \xi\right|^{\frac{n-2}{2}}} f\left(\xi\right) d\xi \equiv \hat{f}\left(x, \lambda\right), \tag{8.19}$$

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{\tau \to 0} \int\limits_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}} e^{-\lambda\tau} \hat{f}(x; \lambda) d\lambda \equiv f(x), \tag{8.20}$$

соответственно. В случае числа измерений n=2 последние формулы записываются:

$$F\left[f\right](x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} J_0\left(\lambda \left|x - \xi\right|\right) f\left(\xi\right) d\xi \equiv \hat{f}\left(x, \lambda\right), \tag{8.21}$$

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{\tau\to 0}\int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\hat{f}(x;\lambda)d\lambda \equiv f(x). \qquad (8.22)$$

Наконец, в пространственном случае $n = 3$ имеем

$$F\left[f\right](x,\lambda) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{R^3}\frac{\sin\left(\lambda\left|x-\xi\right|\right)}{\left|x-\xi\right|}f\left(\xi\right)d\xi \equiv \hat{f}\left(x,\lambda\right), \qquad (8.23)$$

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{\tau\to 0}\int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\hat{f}(x;\lambda)d\lambda \equiv f(x), \qquad (8.24)$$

Основное тождество интегрального преобразования для оператора Лапласа задается равенством

$$F[\Delta_\xi(f)](x,\lambda) = -\lambda^2\hat{f}(x,\lambda). \qquad (8.25)$$

Часть III

Краевые задачи и операторы преобразования

Глава 9

Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородном полупространстве

9.1 Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n^+

Рассмотрим задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве

$$I_n^+ = \left\{ x : x \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} \left(l_{j-1}, l_j \right), \ l_0 \geq 0, \ l_{n+1} = \infty, \ l_j < l_{j+1}, \ \right\}$$

нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q_m^2 \right) y_m = 0, \ q_m^2 = a_m^{-2} \cdot \lambda^2, \quad a_m > 0, \ m = 1, ..., n+1 \tag{9.1}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0 \left[y_1 \right] \big|_{x=l_0} = 0, \quad \left| y_{n+1} \right| \big|_{x=\infty} < \infty \tag{9.2}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[y_{k}\right]=\Gamma_{j2}^{k}\left[y_{k+1}\right], \quad x=l_{k}, \ k=1,...,n, \ j=1,2, \tag{9.3}$$

здесь $\Gamma_0, \Gamma_{j1}^{k}, \Gamma_{j2}^{k} (j=1,2; \ k=1,...,n)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$.

Пусть при некотором λ рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\theta\left(l_{k}-x\right) \ y_{k}(x,\lambda) .$$

В этом случае число λ называется *собственным значением*, а соответствующее решение $y(x,\lambda)$ - *собственной функцией.*

Определим функции $\alpha_{j1}^{k}=\alpha_{j1}^{k}\left(\sqrt{p}\right), \alpha_{j2}^{k}=\alpha_{j2}^{k}\left(\sqrt{p}\right)$; $Rep \geq \sigma_0 > 0$ равенствами:

$\Gamma_{ij}^{k}\left[e^{\sqrt{p}x}\right]=\alpha_{ij}^{k}\cdot e^{\sqrt{p}x}, i,j=1,2; k=1,...,n.$

И потребуем в дальнейшем выполнения условий

$$\det M_{kj}=\det\begin{pmatrix}\alpha_{1j}^{k}\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{1j}^{k}\left(-\sqrt{p}\right)\\ \alpha_{2j}^{k}\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{2j}^{k}\left(-\sqrt{p}\right)\end{pmatrix}\neq 0, \ k=1,...,n, \ j=1,2. \tag{9.4}$$

Обозначим также

$\varphi_{n+1}\left(x,\sqrt{p}\right)=e^{q_{n+1}\cdot x\cdot i}; \ \psi_{n+1}\left(x,\sqrt{p}\right)=e^{-q_{n+1}\cdot x\cdot i}; \ q_{n+1}=a_{n+1}^{-1}\cdot\sqrt{p}$, $Rep \geq \sigma_0 > 0$.

Из условий (9.4) следует, что из рекуррентных соотношений:

$$\Gamma_{j1}^{k}\left(\varphi_{k},\psi_{k}\right)=\Gamma_{j2}^{k}\left(\varphi_{k+1},\psi_{k+1}\right), \quad k=1,...,n; \quad j=1,2 \tag{9.5}$$

можно определить остальные n пар функций (φ_k,ψ_k), $k=1,...,n$.

Введем также обозначения

$\Gamma_0\left[\varphi_1\left(x,\sqrt{p}\right)\right]\big|_{x=l_0}=\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}\left(\sqrt{p}\right)$, $\Gamma_{ij}^{k}\left[\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]\big|_{x=l_k}=\varphi_{ij}^{k}\left(\sqrt{p}\right)$, $i,j=1,2; k=1,...,n,$

$$\Gamma_0\left[\psi_1\left(x,\sqrt{p}\right)\right]\big|=\overset{0}{\underset{1}{\psi}}\left(x,\sqrt{p}\right) \ , \Gamma_{ij}^{k}\left[\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]\big|=\psi_{ij}^{k}\left(x,\sqrt{p}\right) \ .$$

Условия неограниченной разрешимости задачи (9.1)-(9.3) принимают вид:

$$\det M_{kj}\neq 0, \ k=1,...,n, \ j=1,2. Rep \geq \sigma_0 > 0.$$

Теорема 9.1 *Если выполнены условия неограниченной разрешимости задачи (9.1)-(9.3), то спектр задачи (9.1)-(9.3) непрерывен и заполняет полуось* $(0,\infty)$ *. В качестве собственной функции соответствующей собственному значению* λ *можно взять функцию*

$$\varphi(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\ \ \varphi_k(x,\lambda)\,+\,\theta(x-l_n)\ \ \varphi_{n+1}(x,\lambda)\,, \tag{9.6}$$

9.2 Функции влияния в I_n^+.

Условия неограниченной разрешимости позволяют корректно определить вектор- функции влияния $H_{j,s}^*$ [9]:

при $k<s$

$$H_{k,s}^*=\varphi_k\ \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}\left(\xi,\sqrt{p}\right)\,-\psi_k\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}\left(\xi,\sqrt{p}\right)\ \ ,$$
$$k,s=1,...,n+1$$

при $k>s$

$$H_{k,s}^*=\psi_k(x)\left\{-\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(\xi)-\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(\xi)\right\},\quad ,$$

при $k=s$

$$H_{k,s}^*=\begin{cases}\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\ \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\Omega_k^{-1}-\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\overset{0}{\varphi}_1\ \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\Omega_k^{-1}\ ,\\ l_{k-1}<x<\xi<l_k,\\ \psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\left\{-\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\begin{pmatrix}10 & \end{pmatrix}\Omega_k^{-1}-\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\Omega_k^{-1}\right\},\\ l_{k-1}<\xi<x<l_k,\quad k=1,...,n+1\end{cases}$$

Используя функции влияния, найдем решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-p\right)z_k=0\ ,\ k=1,...,n+1, \tag{9.7}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[z_1\right]\Big|_{x=l_0}=g_0,\ |z_{n+1}|<\infty. \tag{9.8}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[z_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[z_k\right]=g_{jk},x=l_k,k=1,...,n;j=1,2, \tag{9.9}$$

Решение задачи (9.7)-(9.9) имеет вид:

$$z_j\left(x\right)=H_{j,1}^*\left(\sqrt{p},x,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}g_0\left(\sigma\right)+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\sqrt{p},x,l_s\right)\ \begin{pmatrix}g_{1s}\left(\sigma\right)\\g_{2s}\left(\sigma\right)\end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

9.3 Краевые задачи для уравнения Лапласа в $R_{n,+}^2$.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве
$R_{n,+}^2=I_n^+\times\left(-\infty,\infty\right),$

решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ u_k=0,\ \ ,\ \ k=1,...,n+1, \tag{9.11}$$

по краевым условиям

$$\begin{aligned}&\Gamma_0\left[u_1\right]|_{x=l_0}=f_0\left(y\right)\ ,\quad -\infty<y<\infty,\\&|u_{n+1}|\ |_{x=\infty}<\ \infty\end{aligned} \tag{9.12}$$

и условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x=l_k$:

$$\Gamma_{j1}^k\left[u_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[u_{k+1}\right]=f_{jk}\left(y\right)\quad ;x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,2, \tag{9.13}$$

здесь $f_0,f_{jk}\in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right),\beta\geq1.$

В образах Фурье по переменной y задача (9.11)-(9.13) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)\tilde{u}_k=0,\ \ ,\ \ k=1,...,n, \tag{9.14}$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l}\Gamma_0\left[\tilde{u}_1\right]|_{x=l_0}=\tilde{f}_0\left(\sigma\right),\\ \left|\tilde{u}_{n+1}\right|\,|_{x=\infty}<\infty\end{array} \tag{9.15}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right)\quad ,x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,2. \tag{9.16}$$

Из формулы (9.10) следует, что решение задачи (9.14)-(9.16) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\tilde{f}_0\left(\sigma\right)+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)\ \begin{pmatrix}\tilde{f}_{1s}\left(\sigma\right)\\ \tilde{f}_{2s}\left(\sigma\right)\end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (9.11)-(9.13):

$$u_j\left(x,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(H_{j,1}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_0\left(\eta\right)+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}\ \begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\ f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}\right)d\eta, \tag{9.18}$$

где $H_{\ j,s}$ обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\ j,s}^{\ *}$, т.е.

$$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma\left|\eta-y\right|}H_{j,s}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)d\sigma.$$

Перенося контур интегрирования на действительную отрицательную полуось, на основании леммы Жордана и теоремы Коши [18] для оригиналов функций влияния, получаем формулу

$$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty v_j\left(x,\lambda\right)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_s^{-1}\left(l_s,\lambda\right)e^{-\lambda|\eta-y|}\lambda d\lambda\ ,$$

$$v_j\left(x,\lambda\right)=\varphi_j\left(x,\lambda\right)\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}-\psi_j\left(x,\lambda\right)\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\ .$$

Для обоснования формулы заметим также, что конструкция функций ϕ_k, ψ_k такова, что при переходе с нижнего берега разреза вдоль отрицательной полуоси на верхний берег разреза каждая из функций

$$\left(\varphi_k\quad\psi_k\right)\ \Omega_s^{-1}\left(\eta,\sqrt{p}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

останется неизменной.

В соответствии с полученным выражением для вектор- функций $H_{\ j,s}$, запишем формулу для решения основной задачи (9.11)-(9.13) в виде:

$$u_j\left(x,y\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty v_j\left(x,\lambda\right)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_1^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda|\eta-y|}f_0\left(\eta\right)d\eta\right)\lambda d\lambda+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^n\int_0^\infty v_j\left(x,\lambda\right)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_s^{-1}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda|\eta-y|}\begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}d\eta\right)\lambda d\lambda.$$

9.4 Краевые задачи и операторы преобразования в $R_{n,+}^2$.

Рассмотрим следующие модельные задачи Дирихле для полуплоскости $R_+^2=\{\ (x,y):0<x,\ -\infty<y<\infty\}$:

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_0=0,\\ \hat{u}_0|_{x=l_0}=f_0\left(y\right),\quad -\infty<y<\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0\ ,\\ \hat{u}_{js}|_{x=l_s}=f_{js}\left(y\right)\ ,\\ -\infty<y<\infty,s=1,...,n;j=1,2.\end{cases}$$

Если $f_0, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right)$, $\beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^2\right)$ [11], которое находится по формуле Пуассона для верхней полуплоскости. Основную формулу (9.18) можно переписать в форме:

$$u_k(x,y) = \int_0^\infty v_k \left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\, \overset{0}{\psi_1^{-1}}\right)\, \Omega_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_0(\xi,y)\, d\xi\right) \lambda d\lambda +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_k \left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\, \overset{0}{\psi_1^{-1}}\right)\, \Omega_s^{-1} \left(\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi \begin{pmatrix} \hat{u}_{1s}(\xi,y) \\ \hat{u}_{2s}(\xi,y) \end{pmatrix} d\xi\right) d\eta\right) \lambda d\lambda.$$

Таким образом, определена серия операторов преобразования $P_0 : \hat{u}_0 \to u_0$ и

$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js}, j = 1,2$ не зависящих от y:

$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0,$

$$u_0(x,y) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x - l_{k-1})\ \theta(l_k - x)\ u_{0\,k}(x,y)\ ,$$

$$u_{0k}(x,y) = \int_0^\infty v_{k0}(x,\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_0(\xi,y)\, d\xi\right) \lambda d\lambda\ ;$$

$$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js},\ u_{js}(x,y) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x - l_{k-1})\ \theta(l_k - x)\ u_{js,k}(x,y)\ ,$$

$$u_{1s,k} = \int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\ \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_{1s}(\xi,y)\ d\xi\right) d\eta\right) \lambda d\lambda,$$

$$u_{2s,k} = \int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\ \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_{2s}(\xi,y)\ d\xi\right) d\eta\right) \lambda d\lambda,$$

где

$$v_{k,0}(x,\lambda) = v_k(x,\lambda) \left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\, \overset{0}{\psi_1^{-1}}\right) \Omega_1^{-1}(l_0,\lambda)\,,$$

$$v_{k,s}(x,\lambda) = v_k(x,\lambda) \left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\, \overset{0}{\psi_1^{-1}}\right) \Omega_s^{-1}(l_s,\lambda)\,.$$

Теорема 9.2 *Пусть выполнены условия неограниченной разрешимости и пусть справедливы неравенства:*

$$|\omega_{j0,k}| \leq \frac{c_0}{(1+\lambda^2)^{\alpha_0/2}}, j = 1,2; k = 1,..,n+1; c_0 > 0, \alpha_0 \geq 0,$$

$$\|\omega_{js,k}\| \le \frac{c_{js}}{\left(1+\lambda^2\right)^{\alpha_{js}/2}}, k=1,...,n+1; c_{js}>0, \alpha_{js}\ge 0,$$

в которых функции $\omega_{10,k}, \omega_{20,k}$, $\omega_{js,k}$ *определены условиями*

$$v_{k0}\left(x,\lambda\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_{10,k}\ e^{iq_k x} + \omega_{20,k}\ e^{iq_k(2l_k - x)},$$

$$v_{ks}\left(x,\lambda\right) = \omega_{1s,k}\ e^{iq_k x} + \omega_{2s,k}\ e^{iq_k(2l_k - x)},$$

тогда оператор $P_0 : \hat{f}_0 \to f_0$ *осуществляет непрерывное отображение пространств* $H_2^{\beta}\left(R_+\right)$ *и* $H_2^{\alpha_0+\beta}\left(R_{n,+}\right)$, *операторы* $P_{js} : \hat{f}_{js} \to f_{js}$ *осуществляют непрерывное отображение пространств* $H_2^{\beta}\left(R_+\right)$ *и* $H_2^{\alpha_{js}+\beta}\left(R_{n,+}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $P_0 : \hat{g}_0 \to g_0$,
где

$$g_0\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k - x\right)\,g_{0\,k}\left(x\right)\,+\,\theta\left(x-l_n\right)\,g_{0\,n+1}\left(x\right).$$

Для функции g_{0k} имеем интегральное представление:

$$g_{0k}\left(x\right) = \int_0^{\infty}\left(\omega_{10,k}\ e^{iq_k x} + \omega_{20,k}\ e^{iq_k(2l_k-x)}\right) F_s\left[\hat{g}_0\right]\lambda d\lambda,$$

где $F_s\left[\hat{g}_0\right]$ - синус- преобразование функции $\hat{g}_0$. Из условия теоремы следует что:

$$\left(1+\lambda^2\right)^{\beta/2} F_s\left[\hat{g}_0\right] \in L_2\left(R_+\right).$$

Следовательно

$$\left(1+\lambda^2\right)^{(\alpha_0+\beta)/2}\omega_{j0,k} F_s\left[\hat{g}_0\right] \in L_2\left(R_+\right), j=1,2.$$

Аналогично изучается случай операторов P_{js}.

Следствие 9.1. Если $f_0, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right), \beta \ge 1$, то существует и единственно решение $u \in H_2^{\alpha+\beta,\beta}, \alpha = \min\left(\alpha_0, \alpha_{js}\right)$ общей краевой задачи (9.11)-(9.13), где $H_2^{\alpha+\beta,\beta}$ - анизотропное пространство Соболева [11].

Доказательство. Решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования по формуле

$$u = P_0\left[\hat{u}_0\right] + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

Утверждение следует из теоремы 9.2 .

Для наиболее важных в инженерной практике краевых задач ниже будут приведены другие, более удобные формулы.

9.5 Уравнение Лапласа в $R^{m+1}_{n,+}$.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $R^{m+1}_{n,+} = I_n^+ \times R^m$,

$$I_n^+ = \left\{ x : x \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} \left(l_{j-1}, l_j\right),\ \ l_0 \geq 0,\ \ l_{n+1} = \infty,\ \ l_j < l_{j+1},\ \ \right\}$$

решения сепаратной системы уравнений Лапласа

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y\right) u_k = 0\ \ ,\ \ k = 1, ..., n+1, \Delta_y = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \tag{9.19}$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l} \Gamma_0\left[u_1\right]\big|_{x=l_0} = f_0\left(y\right), \quad y \in R^{\mathrm{m}}, \\ \left|u_{n+1}\right|\big|_{x=\infty} < \infty \end{array} \tag{9.20}$$

и условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma^k_{j1}\left[u_k\right] - \Gamma^k_{j2}\left[u_{k+1}\right] = f_{jk}\left(y\right), \quad x = l_k,\ \ k = 1, ..., n,\ \ j = 1, 2. \tag{9.21}$$

В образах Фурье с неразделенными переменными по переменным y из главы 8 задача (9.19)-(9.21) принимает вид:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)\tilde{u}_k=0,\ \ k=1,...,n+1, \tag{9.22}$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l}\Gamma_0\left[\tilde{u}_1\right]|_{x=l_0}=\tilde{f}_0\left(\sigma\right), \quad y\in R^m,\\ \left|\tilde{u}_{n+1}\right|\,|_{x=\infty}<\,\infty\end{array} \tag{9.23}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk},(\sigma)\quad ,x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,2. \tag{9.24}$$

Из формулы (9.18) следует, что решение задачи (9.22)-(9.24) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\tilde{f}_0\left(\sigma\right)+\sum_{s=1}^n H_{\ j,s}^{\ *}\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)\ \begin{pmatrix}\tilde{f}_{1s}\left(\sigma\right)\\ \tilde{f}_{2s}\left(\sigma\right)\end{pmatrix}. \tag{9.25}$$

Применяя формулу для обратного интегрального преобразования Фурье с неразделенными переменными получим решение задачи (9.19)-(9.21) в виде:

$$u_j\left(x,y\right)=\int_{R^{n+1}}\left(H_{j,1}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_0\left(\eta\right)+\sum_{s=1}^n H_{\ j,s}\ \begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\ f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}\right)d\eta,$$

где $H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\ j,s}^{\ *}$, т.е.
$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\displaystyle\int_0^\infty\sigma^{\frac{m}{2}}\frac{J_{\frac{m-2}{2}}\left(\sigma\left|y-\eta\right|\right)}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}H_{j,s}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)d\sigma.$

Перенося контур интегрирования на действительную отрицательную полуось, получаем:

$$\begin{array}{l}H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\omega_m\int_0^\infty v_{j,s}\left(x,\lambda\right)Re\left[\left(i\lambda\right)^{\frac{m}{2}}\ \frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}\left(i\lambda\left|y-\eta\right|\right)}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}\right]d\sigma,\\ v_{j,s}\left(x,\lambda\right)=\left(\varphi_j\left(x,\lambda\right)\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}-\psi_j\left(x,\lambda\right)\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\ \overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_s^{-1}\left(l_s,\lambda\right)\end{array}$$

$$v_{j,0}(x,\lambda)=\left(\varphi_j(x,\lambda)\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}-\psi_j(x,\lambda)\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_1^{-1}(l_0,\lambda)\ ,$$
$$\omega_m=\Gamma\left(\tfrac{m+1}{2}\right)\pi^{-\frac{m+1}{2}}.$$

здесь $H^1_{m/2-1}$ - бесселевы функции третьего рода [19]. Для обоснования формулы заметим также, что конструкция функций ϕ_k, ψ_k такова, что при переходе с нижнего берега разреза вдоль отрицательной действительной полуоси на верхний берег разреза все вектор-функции

$$(\varphi_k \quad \psi_k)\ \Omega_s^{-1}(\eta,\sqrt{p})$$

останутся неизменными. В соответствии с полученным выражением для $H_{\ j,s}$ формулу для решения основной задачи (9.19)-(9.21) запишем в виде

$$u_j(x,y)=\omega_m\int_0^\infty v_{j,0}(x,\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\int_0^\infty Re\,[M]f_0(\eta)\,d\eta\right)\lambda d\lambda+$$

$$+\omega_m\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda)\left(\int_0^\infty Re\left[M\right]\begin{pmatrix}f_{1s}(\eta)\\f_{2s}(\eta)\end{pmatrix}d\eta\right)\lambda d\lambda,\ (9.26)$$

$$M=(i\lambda)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}(i\lambda\,|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{m-2}{2}}}$$

9.6 Краевые задачи и операторы преобразования в $R^{m+1}_{n,+}$.

Рассмотрим модельные задачи Дирихле для полупространства:

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_0=0, \quad 0<x,y\in R^m,\\ \hat{u}_0|_{x=l_0}=f_0(y)\,, \quad y\in R^m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0, \quad 0<x,\ y\in R^m,\\ \hat{u}_{js}|_{x=l_s}=f_{js}(y)\,, \quad y\in R^m,\\ j,s=1,...,n;\,j=1,2.\end{cases}$$

Если $f_0, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^m\right), \beta \geq 1$, то у каждой из выписанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+ \times R^m\right)$ [11], которое находится по формуле Пуассона для верхней полуплоскости. Основную формулу (9.26) преобразуем к виду:

$$u_k\left(x, y\right) = \int_0^\infty v_{k,0}\left(x, \lambda\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi \; \hat{u}_0\left(\xi, y\right) d\xi\right) \lambda d\lambda +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty v_{k,s}\left(x, \lambda\right) \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi \; \begin{pmatrix} \hat{u}_{1s}\left(\xi, y\right) \\ \hat{u}_{2s}\left(\xi, y\right) \end{pmatrix} d\xi\right) \lambda d\lambda.$$

Таким образом, решение основной краевой задачи выражается при помощи операторов преобразования по формуле:

$$u = P_0\left[\hat{u}_0\right] + \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

Глава 10

Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородном пространстве

10.1 Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n.

Рассмотрим **задачу Штурма- Лиувилля** о конструкции ограниченного на множестве

$$I_n = \left\{ x : x \in \overset{n+1}{\underset{j=0}{U}} \left(l_{j-1}, l_j \right), \;\; l_0 \geq 0, l_{-1} = -\infty, \;\; l_{n+1} = \infty, \;\; l_j < l_{j+1} \right\}$$

нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q_m^2 \right) y_m = 0, \qquad q_m^2 = a_m^{-2} \cdot \lambda^2, \;\; a_m > 0; m = 0, ..., n+1, \quad (10.1)$$

по условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k \left[y_k \right] = \Gamma_{j2}^k \left[y_{k+1} \right], \quad x = l_k, \;\; k = 0, ..., n, \;\; j = 1, 2, \qquad (10.2)$$

И по краевым условиям

$$|y_0| < \infty, \quad |y_{n+1}| < \infty, \tag{10.3}$$

здесь $\Gamma_0, \Gamma_{j1}^k, \Gamma_{j2}^k$ $(j = 1, 2; \ k = 1, ..., n)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$.

Пусть при некотором λ рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \theta(x - l_{k-1}) \ \theta(l_k - x) \ y_k(x, \lambda) \ .$$

В этом случае число λ называется *собственным значением*, а соответствующее решение $y(x, \lambda)$ - *собственной вектор-функцией.*

Из равенств $\Gamma_{ij}^k \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \Gamma_{ij}^k$ следует, что существуют функции $\alpha_{j1}^k, \alpha_{j2}^k$ такие, что:

$\Gamma_{ij}^k \left[e^{\sqrt{p}x} \right] = \alpha_{ij}^k \cdot e^{\sqrt{p}x}, i, j = 1, 2; k = 1, ..., n.$

В дальнейшем считаем выполненными условия:

$$\det M_{kj} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^k \left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{1j}^k \left(-\sqrt{p}\right) \\ \alpha_{2j}^k \left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{2j}^k \left(-\sqrt{p}\right) \end{pmatrix} \neq 0, \ \ k = 1, ..., n, \ \ j = 1, 2, \tag{10.4}$$

$$Re p \geq \sigma_0 > 0.$$

Обозначим

$\varphi_0(x, p) = e^{q_0 \cdot x \cdot i}; \ \ \psi_{n+1}(x, p) = e^{-q_{n+1} \cdot x \cdot i}; \ \ q_{n+1} = a_{n+1}^{-1} \cdot \sqrt{p}.$

Из условия (10.4) следует, что рекуррентные соотношения

$$\Gamma_{j2}^k [\varphi_{k+1}] = \Gamma_{j1}^k [\varphi_k], \Gamma_{j1}^k [\psi_k] = \Gamma_{j2}^k [\psi_{k+1}], \quad k = 0, ..., n, \quad j = 1, 2, \tag{10.5}$$

корректно задают остальные n пар функций (φ_k, ψ_k), $\ k = 1, ..., n$.

Примем также обозначения:

$$\Gamma_{ij}^k \left[\varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right)\right]\Big|_{x=l_k} = \varphi_{ij}^k\left(\sqrt{p}\right) \ , i, j = 1, 2; k = 0, 1, ..., n,$$

$$\Gamma_{ij}^k \left[\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right)\right]\Big| = \psi_{ij}^k\left(x, \sqrt{p}\right) \ , i, j = 1, 2; k = 0, 1, ..., n,$$

и потребуем выполнения условий неограниченной разрешимости задачи

$$\det \Omega_k\left(\sqrt{p}\right) \neq 0, Rep \geq \sigma_0 > 0. \tag{10.6}$$

Теорема 10.1 *Спектр задачи (10.1)-(10.3) непрерывен и заполняет всю полуось* $(-\infty, \infty)$ *. Все собственные значения* λ *задачи Штурма-Лиувилля простые. В качестве собственного вектора, соответствующего* λ*, можно взять функцию*

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \theta(x - l_{k-1})\, \theta(l_k - x)\, \varphi_k(x, \lambda) \ .$$

10.2 Функции влияния в I_n.

Введем функции влияния $H^*_{j,s}$ по формулам:

при $k < s$

$$H^*_{k,s} = \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) (10)\ \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right)\ , \quad k, s = 0, 1, ..., n,$$

при $k > s$

$$H^*_{k,s} = -\psi_k(x) \cdot (01)\ \Omega_s^{-1}(\xi)\,, \quad l_{k-1} < x < l_k,\ \ l_{s-1} < \xi < l_s,$$

при $k = s$

$$H^*_{k,s} = \begin{cases} \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) (10)\ \Omega_k^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right), l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot (01)\ \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right), l_{k-1} < \xi < x < l_k, k = 1, ..., n+1. \end{cases}$$

Функции $H^*_{k,s}\left(\sqrt{p}, x, \xi\right)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи (10.6). С их помощью можно найти решение сепаратной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - p\right) z_k = 0, k = 0, 1, ..., n+1 \tag{10.7}$$

по краевым условиям

$$|z_0| < \infty; \quad |z_{n+1}| < \infty \tag{10.8}$$

и по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[z_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[z_{k+1}\right]=g_{jk}, x=l_k,\ \ k=0,...,n,\ \ j=1,2. \tag{10.9}$$

Из определения функций влияния $H_{k,s}^{*}$ следует формула для решения задачи (10.7)-(10.9):

$$z_j\left(x\right)=\sum_{s=0}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\sqrt{p},x,l_s\right)\ \begin{pmatrix} g_{1s}\\ g_{2s}\end{pmatrix}. \tag{10.10}$$

10.3 Уравнение Лапласа в R_n^2.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного в кусочно-однородном пространстве $R_n^2=I_n\times(-\infty,\infty)$,

$$I_n=\left\{x:x\in\overset{n+1}{\underset{j=0}{U}}\left(l_{j-1},l_j\right),\ \ l_0\geq 0,\ \ l_{-1}=-\infty,l_{n+1}=\infty,\ \ l_j<l_{j+1}\ \right\}$$

решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_k=0,\ \ k=0,...,n+1 \tag{10.11}$$

по краевым условиям

$$\left|u_0\right|\,\big|_{x=-\infty}<\ \infty,\left|u_{n+1}\right|\,\big|_{x=\infty}<\ \infty \tag{10.12}$$

и условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x=l_k$:

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[u_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[u_{k+1}\right]=f_{jk}\left(y\right),\qquad x=l_k,\ \ k=0,...,n,\ \ j=1,2. \tag{10.13}$$

В образах Фурье по переменной y, краевая задача (10.11)-(10.13) принимает вид:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)\tilde{u}_k=0,\quad k=0,...,n+1,\tag{10.14}$$

по краевым условиям

$$|\tilde{u}_0|\,|_{x=-\infty}<\infty\;|\tilde{u}_{n+1}|\,|_{x=\infty}<\infty\tag{10.15}$$

и по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right)\quad,x=l_k,\;\;k=0,...,n,\;\;j=1,2.\tag{10.16}$$

Из формулы (10.10) следует, что:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=\sum_{s=0}^{n}H_{\;j,s}^{\;*}\left(|\sigma|\,,x,l_s\right)\;\begin{pmatrix}\tilde{f}_{1s}\left(\sigma\right)\\ \tilde{f}_{2s}\left(\sigma\right)\end{pmatrix},\tag{10.17}$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (10.11)-(10.13):

$$u_j\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}H_{\;j,s}\left(x,|\eta-y|\,,l_s\right)\;\begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\ f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}d\eta,$$

где $H_{\;j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\;j,s}^{\;*}$, т.е.

$$H_{\;j,s}\left(x,|\eta-y|\,,l_s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma|\eta-y|}H_{j,s}^{*}\left(|\sigma|\,,x,l_s\right)d\sigma.$$

Перенося контур интегрирования на отрицательную действительную полуось, на основании леммы Жордана и теоремы Коши для оригиналов функций влияния получаем формулу

$$H_{\;j,s}\left(x,|\eta-y|\,,l_s\right)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}v_{js}\left(x,\lambda\right)e^{-\lambda|\eta-y|}\lambda d\lambda,$$

где

$$v_{js}\left(x,\lambda\right)=v_{js}\left(x,\lambda\right)\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}\left(l_s,\lambda\right).$$

В соответствии с полученным выражением для функций влияния $H_{\;j,s}$, решение основной задачи (10.11)-(10.13) можно записать в виде

$$u_j(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{n}\int_0^\infty v_{js}(x,\lambda)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda|\eta-y|}\left(\begin{array}{c} f_{1s}(\eta) \\ f_{2s}(\eta)\end{array}\right)d\eta\right)\lambda d\lambda. \quad (10.18)$$

10.4 Краевые задачи и операторы преобразования в R_n^2.

Рассмотрим модельные задачи Дирихле для правой полуплоскости:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\hat{u}_{js} = 0, \quad l_s < x, \ -\infty < y < \infty, \\ \hat{u}_{js}\big|_{x=l_s} = f_{js}(y)\ , \quad -\infty < y < \infty, s = 0, ..., n; j = 1, 2. \end{array}\right.$$

Если $f_0, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}(R^1)\ , \beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{js} \in H_2^\beta(R_+ \times \mathrm{R})$ [11], которое находится по формуле Пуассона для верхней полуплоскости. Основную формулу (10.18) можно переписать в виде:

$$u_k = \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{n}\int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \left(\begin{array}{c} \hat{u}_{1s}(\xi,y) \\ \hat{u}_{2s}(\xi,y)\end{array}\right)d\xi\right)\lambda d\lambda.$$

Таким образом, определены операторы преобразования:

$$P_{js}: \hat{u}_{js} \to u_{js}, j = 1, 2,$$

$$u_{js}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1}\theta(x - l_{k-1})\ \theta(l_k - x)\ u_{js,k}(x,\lambda)$$

$$u_{1s,k} = \int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0\end{array}\right)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_{1s}(\xi,y)\ d\xi\right)\lambda d\lambda,$$

$$u_{2s,k} = \int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1\end{array}\right)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_{2s}(\xi,y)\ d\xi\right)\lambda d\lambda.$$

Теорема 10.2 *Пусть выполнены условия неограниченной разрешимости задачи (10.6) и пусть справедливы неравенства:*

$$\|\omega_{js,k}\| \leq \frac{c_{js}}{(1+\lambda^2)^{\alpha_{js}/2}}, k = 0, 1, ..., n+1; c_{js} > 0, \alpha_{js} \geq 0,$$

в которых вектор- функции $\omega_{js,k}$ определены условиями

$$v_{ks}(x,\lambda) = \omega_{1s,k}\; e^{iq_k x} + \omega_{2s,k}\; e^{iq_k(2l_k - x)},$$

тогда операторы $P_{js} : \hat{f}_{js} \to f_{js}$ *осуществляют непрерывное отображение пространств* $H_2^{\beta}\left(R_+\right)$ *и* $H_2^{\alpha_{js}+\beta}\left(R_{n,+}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $P_{js} : \hat{g}_{js} \to g_{js}$,
где

$$g_{js}(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta(x - l_{k-1})\; \theta(l_k - x)\;\; g_{js\,k}(x) \;+\; \theta(x - l_n)\;\; g_{js,\,n+1}(x)\,.$$

Для функции $g_{js,k}$ имеем интегральное представление:

$$g_{js,k}(x) = \int_0^{\infty} \left(\omega_{1js,k}\; e^{iq_k x} + \omega_{2js,k}\; e^{iq_k(2l_k - x)}\right)\; F_s\left[\hat{g}_{js}\right] \lambda d\lambda,$$

где $F_s\left[\hat{g}_{js}\right]$ - синус преобразование функции $\hat{g}_{js}$. Из условия теоремы следует что:

$$\left(1+\lambda^2\right)^{\beta/2} F_s\left[\hat{g}_{js}\right] \in L_2\left(R_+\right).$$

Следовательно:

$$\left(1+\lambda^2\right)^{(\alpha_{js}+\beta)/2} \omega_{js,k} F_s\left[\hat{g}_{js}\right] \in L_2\left(R_+\right), j = 1,2.$$

Следствие 10.1. Если $f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right), \beta \geq 1$, то существует и единственно решение $u \in H_2^{\alpha+\beta,\beta}, \alpha = \min \alpha_{js}$ основной краевой задачи (10.11)-(10.13) .

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 6.2, т.к. решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования по формуле

$$u = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

10.5 Уравнение Лапласа в R_{n+}^{m+1}.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $R_{n+}^{m+1} = I_n \times R^m$ решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y \right) u_k = 0, \quad k = 0, 1, ..., n+1, \tag{10.19}$$

по краевым условиям

$$|u_0| < \infty| \,, |u_{n+1}| \, < \, \infty \tag{10.20}$$

и условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma_{j1}^k \left[u_k \right] - \Gamma_{j2}^k \left[u_{k+1} \right] = f_{jk} \left(y \right), \qquad x = l_k, \;\; k = 0, ..., n, \;\; j = 1, 2. \tag{10.21}$$

В образах Фурье с неразделенными переменными задача (10.19)-(10.21) принимает вид:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2 \right) \tilde{u}_k = 0, \quad k = 0, 1, ..., n+1, \tag{10.22}$$

по краевым условиям

$$|\tilde{u}_0| < \infty| \,, |\tilde{u}_{n+1}| \, < \, \infty \tag{10.23}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k \left[\tilde{u}_k \right] - \Gamma_{j2}^k \left[\tilde{u}_{k+1} \right] = \tilde{f}_{jk} \left(\sigma \right) \quad , x = l_k, \;\; k = 0, 1, ..., n, \;\; j = 1, 2. \tag{10.24}$$

Из формулы (10.17) следует, что решение задачи (10.22)-(10.24) имеет вид:

$$\tilde{u}_j \left(x, \sigma \right) = \sum_{s=0}^{n} H_{\;j,s}^{\,*} \left(|\sigma| \,, x, l_s \right) \; \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1s} \left(\sigma \right) \\ \tilde{f}_{2s} \left(\sigma \right) \end{pmatrix}. \tag{10.25}$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (10.19)-(10.21) в виде

$$u_j(x,y)=\int_{R^m}\sum_{s=0}^{n}H_{\,j,s}(x,|\eta-y|,l_s)\begin{pmatrix} f_{1s}(\eta)\\ f_{2s}(\eta)\end{pmatrix}d\eta,$$

где $H_{\,j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\,*}_{j,s}$, т.е.

$$H_{\,j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\int_0^\infty\sigma^{\frac{m}{2}}\frac{J_{\frac{m-2}{2}}(\sigma|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{m-2}{2}}}H^*_{j,s}(|\sigma|,x,l_s)\,d\sigma.$$

Переноса контур интегрирования на действительную отрицательную полуось и учитывая, что при переходе с нижнего берега разреза на верхний берег разреза все вектор- функции $(\varphi_k\quad\psi_k)\ \ \Omega_s^{-1}\left(\eta,\sqrt{p}\right)$ останутся неизменными, получаем формулу:

$$H_{\,j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\omega_m\int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda)\,Re\left[(i\lambda)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{m/2-1}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{m-2}{2}}}\right]d\sigma,$$

$$v_{j,s}(x,\lambda)=\varphi_j(x,\lambda)\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(l_s,\lambda);\quad \omega_m=\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\pi^{-\frac{m+1}{2}},$$

здесь $\mathrm{H}^1_{m/2-1}$ -бесселевы функции третьего рода [19]. В соответствии с полученным выражением для $H_{\,j,s}$, формулу для решения основной задачи (10.19)-(10.21) запишем в виде:

$$u_j(x,y)=\omega_m\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda)\,.\left(\int_0^\infty Re\Big[M\Big]\begin{pmatrix} f_{1s}(\eta)\\ f_{2s}(\eta)\end{pmatrix}d\eta\right)\lambda d\lambda, \quad (10.26)$$

$$M=(i\lambda)^{\frac{m}{2}}\frac{H^1_{m/2-1}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{m-2}{2}}}$$

10.6 Краевые задачи и операторы преобразования в R^{m+1}_{n+}.

Рассмотрим модельные задачи Дирихле для полупространства:

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0,\quad l_s<x,\ y\in R^m,\\ \hat{u}_{js}\big|_{x=l_s}=f_{js}(y)\,,\quad y\in R^m, s=0,...,n; j=1,2.\end{cases}$$

Если $f_0, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right), \beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^2\right)$ [11], которое находится по формуле Пуассона для полупространства. Основную формулу (10.26) можно привести к виду:

$$u_k\left(x,y\right) = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\infty} v_{k,s}\left(x,\lambda\right) \left(\int_0^{\infty} sin\lambda\xi \, \begin{pmatrix} \hat{u}_{1s}\left(\xi,y\right) \\ \hat{u}_{2s}\left(\xi,y\right) \end{pmatrix} d\xi \right) \lambda d\lambda,$$

где

$$v_{ks}\left(x,\lambda\right) = v_k\left(x,\lambda\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}\left(l_s,\lambda\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, (10.19)-(10.21) решают операторы преобразования P_{js} :

$$u = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

Глава 11

Неоднородные краевые задачи для функций, гармонических в кусочно-однородной полосе

11.1 Задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье в I_n.

Рассмотрим задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве

$$I_n = \left\{ x : x \in \underset{j=1}{\overset{n+1}{U}} (l_{j-1}, l_j)\,,\ \ l_0 \geq 0,\ \ l_{n+1} = l < \infty,\ \ l_j < l_{j+1},\ \ j = 1, ..., n \right\}$$

нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q_m^2 \right) y_m = 0,\ \ q_m^2 = a_m^{-2} \cdot \lambda^2,\ \ a_m > 0; m = 1, ..., n+1, \tag{11.1}$$

по граничным условиям

$$\Gamma_0 \left[y_1 \right] \big|_{x=l_0} = 0, \Gamma_{n+1} \left[y_{n+1} \right] \big|_{x=l_0} = 0 \tag{11.2}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[y_k\right] = \Gamma_{j2}^{k}\left[y_{k+1}\right]\ , \qquad x = l_k,\ \ k = 1, ..., n,\ \ j = 1, 2, \tag{11.3}$$

здесь $\Gamma_0, \Gamma_{n+1}, \Gamma_{j1}^k, \Gamma_{j2}^k$ $(j = 1, 2;\ \ k = 1, ..., n)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$. Пусть при некотором λ, рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y\left(x, \lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x - l_{k-1}\right)\, \theta\left(l_k - x\right)\, y_k\left(x, \lambda\right) \,+\, \theta\left(x - l_n\right)\, y_{n+1}\left(x, \lambda\right).$$

В этом пункте мы рассматриваем только самосопряженные задачи Штурма-Лиувилля (11.1)-(11.3) см. [9].

Определим функции $\alpha_0 = \alpha_0\left(\sqrt{p}\right), \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}\left(\sqrt{p}\right), \alpha_{ij}^k = \alpha_{ij}^k\left(\sqrt{p}\right)$ из соотношений:

$\Gamma_0\left[e^{q_1 x}\right] = \alpha_0 \cdot e^{q_1 x}, \Gamma_{n+1}\left[e^{q_{n+1} x}\right] = \alpha_{n+1} \cdot e^{q_{n+1} x}, \Gamma_{ij}^k\left[e^{q_k x}\right] = \alpha_{ij}^k \cdot e^{q_k x}$, $i, j = 1, 2; k = 1, ..., n,$

и потребуем выполнения условий

$$\det M_{kj} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{1j}^k\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{1j}^k\left(-\sqrt{p}\right) \\ \alpha_{2j}^k\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{2j}^k\left(-\sqrt{p}\right) \end{pmatrix} \neq 0, \tag{11.4}$$

$k = 1, ..., n,\ \ j = 1, 2,$

$$\alpha_0\left(-\sqrt{p}\right) \neq 0, \alpha_{n+1}\left(\sqrt{p}\right) \neq 0, Rep \geq \sigma_0 > 0$$

Примем обозначения: $\psi_{n+1}\left(x, \sqrt{p}\right) = e^{-q_{n+1}(2l_{n+1} - x)}/\alpha_{n+1}\left(\sqrt{p}\right)$. Рекуррентными соотношениями

$$\Gamma_{j1}^k\left(\psi_k\right) = \Gamma_{j2}^k\left(\psi_{k+1}\right), \quad k = 1, ..., n, \quad j = 1, 2$$

определим остальные n функций $\psi_n, ..., \psi_1$. Аналогично, положим $\varphi_1\left(x, \sqrt{p}\right) = e^{q_1 x}/\alpha_0\left(\sqrt{p}\right)$, а функции $\varphi_2, ..., \varphi_{n+1}$ определим рекуррентными соотношениями:

$$\Gamma_{j2}^k\left(\varphi_{k+1}\right) = \Gamma_{j1}^k\left(\varphi_k\right)\ , \quad k = 1, ..., n, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что набор функций φ_k, ψ_k задан корректно ввиду условия (11.4).

Введем также обозначения

$\Gamma_{ij}^{k}\left[\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]=\varphi_{ij}^{k}\left(\sqrt{p}\right),i,j=1,2;k=1,...,n,$
$\Gamma_{ij}^{k}\left[\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]=\psi_{ij}^{k}\left(x,\sqrt{p}\right),i,j=1,2;k=1,...,n,$
и потребуем выполнения условия неограниченной разрешимости задачи (11.1)-(11.3)

$$\det\Omega_k\neq 0,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,2.Rep\geq\sigma_0>0. \qquad (11.5)$$

Так как задача Штурма-Лиувилля (11.1)-(11.3) для оператора Фурье $-\frac{d^2}{dx^2}$ самосопряженная и выполняются условия (11.5), то ее спектр дискретен, все собственные числа действительные, положительные, простые [9], при этом если λ_i - собственное число рассматриваемой краевой задачи (11.1)-(11.3), то это число корень каждого из уравнений:

$$\det\Omega_k\left(\lambda_i\right)=0,\ \ k=1,...,n.$$

В качестве собственной функции, соответствующей собственному значению λ_i, можно выбрать функцию:

$$\varphi\left(x,\lambda_i\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,\varphi_k\left(x,\lambda_i\right). \qquad (11.6)$$

11.2 Уравнение Лапласа в $I_n\times\left(-\infty,\infty\right)$.

Введем вектор- функции влияния $H_{j,s}^{*}$ по формулам:
при $k<s$

$$H_{k,s}^{*}=\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\ \Omega_s^{-1}\left(\xi,\sqrt{p}\right),\quad k,s=1,...,n+1;$$

при $k>s$

$$H_{k,s}^{*}=-\psi_k\left(x\right)\cdot\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}\left(\xi\right)\ ,\quad l_{k-1}<x<l_k,\ \ l_{s-1}<\xi<l_s;$$

при $k=s$

$$H_{k,k}^{*}=\begin{cases}\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\ \Omega_k^{-1}\left(\xi,\sqrt{p}\right),l_{k-1}<x<\xi<l_k,\\-\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\ \Omega_k^{-1}\left(\xi,\sqrt{p}\right),l_{k-1}<\xi<x<l_k,\end{cases}.$$

Функции $H_{k,s}^{*}\left(\sqrt{p},x,\xi\right)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи (11.1)-(11.3). Функции влияния позволяют найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-p\right)z_k=0,\ k=1,...,n+1, \tag{11.7}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[z_1\right]\big|_{x=l_0}=g_0\quad,\Gamma_{n+1}\left[z_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=g_{n+1} \tag{11.8}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[z_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[z_{k+1}\right]=g_{jk},x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,2. \tag{11.9}$$

Непосредственная проверка показывает, что решение задачи (11.7)-(11.9) имеет вид:

$$z_j\left(x\right)=\ H_{j,1}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_0\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}g_0+H_{j,n}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_{n+1}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}g_{n+1}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\sqrt{p},x,l_s\right)\ \begin{pmatrix}g_{1s}\\g_{2s}\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I_n\times(-\infty,\infty)$, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_k=0,\quad k=1,...,n+1, \tag{11.10}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[u_1\right]\big|_{x=l_0}=f_0\left(y\right)\ ,\qquad\Gamma_{n+1}\left[u_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=f_{n+1}\left(y\right)\ ,\quad-\infty<y<\infty \tag{11.11}$$

и условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x=l_k$:

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[u_k\right]y_k-\Gamma_{j2}^{k}\left[u_{k+1}\right]=f_{jk}\left(y\right)\quad;x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,n. \tag{11.12}$$

В образах Фурье по переменной y задача (11.10)-(11.12) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)\tilde{u}_k=0,\quad k=1,...,n+1, \tag{11.13}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[\tilde{u}_1\right]\big|_{x=l_0}=\tilde{f}_0\left(y\right),\,\Gamma_{n+1}\left[\tilde{u}_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=\tilde{f}_{n+1}\left(y\right)\ ,-\infty<y<\infty \tag{11.14}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right)\qquad ,x=l_k,\quad k=1,...,n,\ \ j=1,2. \tag{11.15}$$

Для неизвестного $\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)$ имеем:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\tilde{f}_0\left(\sigma\right)+H_{j,n}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_{n+1}\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\tilde{f}_{n+1}\left(\sigma\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)\ \begin{pmatrix}\tilde{f}_{1s}\left(\sigma\right)\\\tilde{f}_{2s}\left(\sigma\right)\end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (11.10)-(11.12) в виде

$$u_j\left(x,y\right)=\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_{j,1}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_0\left(\eta\right)+\right.$$
$$+H_{j,n}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_{n+1}\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_{n+1}\left(\eta\right)+$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)\ \begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}\right)d\eta,$$

где $H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\ j,s}^{\ *}$, т.е. $H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma\left|\eta-y\right|}H_{j,s}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)d\sigma.$

Учитывая, что особые точки λ_j функции $\omega_s\left(p\right)$ -суть простые полюса, по первой теореме разложения [18], последнюю формулу приведем к виду:

$$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}e^{-\lambda_i\left|\eta-y\right|},$$

здесь Ω_s^* - матрица, присоединенная к матрице Ω, $\omega_s \equiv \det\Omega_s$. Из выражения для $H_{\ j,s}$, получим формулу для решения основной задачи (11.10)-(11.12) в виде

$$u_j(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x,\lambda_i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Omega_1^*(l_0,\lambda_i)}{\omega_1^{/}(\lambda_i)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i|\eta-y|}f_0(\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x,\lambda_i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Omega_n^*(l_{n+1},\lambda_i)}{\omega_n^{/}(\lambda_i)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i|\eta-y|}f_{n+1}(\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\varphi_j(x,\lambda_i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Omega_s^*(l_s,\lambda_i)}{\omega_s^{/}(\lambda_i)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i|\eta-y|}\begin{pmatrix} f_{1s}(\eta) \\ f_{2s}(\eta) \end{pmatrix}d\eta.$$

11.3 Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n \times (-\infty,\infty)$.

Рассмотрим модельные задачи Дирихле для полуплоскости:

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}_0 = 0, \quad l_0 < x, -\infty < y < \infty \\ \hat{u}_0|_{x=l_0} = f_0(y), \quad -\infty < y < \infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}_{n+1} = 0, \quad l_{n+1} < x, -\infty < y < \infty \\ \hat{u}_{n+1}|_{x=l_{n+1}} = f_{n+1}(y), \quad -\infty < y < \infty; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}_{js} = 0, \quad l_s < x,\ -\infty < y < \infty \\ \hat{u}_{js}|_{x=l_s} = f_{js}(y), \quad -\infty < y < \infty, s = 1,...,n; j = 1,2. \end{cases}$$

Если $f_0, f_{n+1}, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}(R^1)$, $\beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}(R_+ \times R)$ [11], которое находится по формуле Пуассона для полупространства. Основную формулу можно переписать в терминах функций $\hat{u}_0, \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{js}$, соответственно:

$$u_j(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_j(x,\lambda_i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\Omega_1^*(l_0,\lambda_i)}{\omega_1^{/}(\lambda_i)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad\int_0^{\infty} sin\lambda\xi\ \hat{u}_0(\xi,y)\,d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_n^*\left(l_{n+1},\lambda_i\right)}{\omega_n^{/}\left(\lambda_i\right)}\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\int_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \hat{u}_{n+1}\left(\xi,y\right)d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}v_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}\int_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \left(\begin{array}{c}\hat{u}_{1s}\left(\xi,y\right)\\\hat{u}_{2s}\left(\xi,y\right)\end{array}\right)d\xi.$$

Таким образом, можно определить серию операторов преобразования:

$P_0:\hat{u}_0\to u_0,\ u_0\left(x,\lambda\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-x\right)u_{0\,k}\left(x,\lambda\right)\ :$

$$u_{0k}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_1^*\left(l_0,\lambda_i\right)}{\omega_1^{/}\left(\lambda_i\right)}\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\quad\int_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \hat{u}_0\left(\xi,y\right)d\xi;$$

далее

$P_{n+1}:\hat{u}_{n+1}\to u_{n+1},u_{n+1}\left(x,\lambda\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-x\right)u_{n+1,\,k}\left(x,\lambda\right)\ :$

$$u_{n+1,k}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\tfrac{\Omega_n^*\left(l_{n+1},\lambda_i\right)}{\omega_n^{/}\left(\lambda_i\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\quad\int\limits_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \hat{u}_{n+1}\left(\xi,y\right)d\xi,$$

а также следующие операторы:

$P_{js}:\hat{u}_{js}\to u_{js},j=1,2,u_{js}\left(x,\lambda\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-x\right)u_{js,k}\left(x,\lambda\right):$

$$u_{1s,k}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}v_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)\int_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \hat{u}_{1s}\left(\xi,y\right)\ d\xi,$$
$$u_{2s,k}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}v_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc}1&0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\int_0^{\infty}sin\lambda\xi\ \hat{u}_{2s}\left(\xi,y\right)\ d\xi.$$

Правильное описание гладкости функций u_0,u_{n+1},u_{js} по информации о гладкости функций $\hat{u}_0,\hat{u}_{n+1},\hat{u}_{js}$ приведем в частном случае краевой задачи с граничными условиями вида:

$\Gamma_9=\alpha_0+\beta_0\dfrac{d}{dx},\Gamma_{n+1}=\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\dfrac{d}{dx},\Gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\dfrac{d}{dx}.$

Теорема 11.1 *Операторы* $P_0:\hat{u}_0\to u_0,\ P_{n+1}:\hat{u}_{n+1}\to u_{n+1},\ P_{js}:\hat{f}_{js}\to f_{js}$ *осуществляют непрерывное отображение пространств* $H_2^2\left(R_+\right)$ *и* $H_2^2\left(I_n\right).$

Доказательство. Рассмотрим случай оператора $P_{js} : \hat{g}_{js} \to g_{js}$,

где

$$g_{js}(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta(x - l_{k-1})\, \theta(l_k - x)\, g_{js\,k}(x) \,+\, \theta(x - l_n)\, g_{js,\,n+1}(x).$$

Из условия теоремы следует, что: $(1 + \lambda^2)\ \ F_s[\hat{g}_{js}] \in L_2(R_+)$. Тогда последовательность $(1 + \lambda_i^2)\ \ F_s[\hat{g}_{js}](\lambda_i) \in l_2$ и, значит, функция $g_{js} \in H_2^2(I_n)$.

Следствие 11.1. Если $f_0, f_{n+1}, f_{js} \in H_2^{3/2}(R)$, , то существует и единственно решение $u \in H_2^2(I_n \times R)$ основной краевой задачи (11.10)-(11.12).

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 11.1, т.к. решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования, по формуле

$$u = P_0[\hat{u}_0] + P_{n+1}[\hat{u}_{n+1}] + \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}[\hat{u}_{js}].$$

11.4 Разложение операторов преобразования в ряд отражений и сдвигов.

Заметим, что представление в форме ряда для операторов преобразования малоэффективно на практике; в нем участвуют не функции $\hat{u}_0, \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{js}$, а их изображения Фурье, при этом требуется знание собственных чисел λ_i задачи Штурма-Лиувилля. С целью получения более удобных представлений, допускающих простую физическую интерпретацию, преобразуем выражения для функций влияния $H_{k,s}^*\left(\sqrt{p}, x, \xi\right)$:

$$H_{k,s}^* = \left(\omega_{ks,1} e^{-q_k x} + \omega_{ks,2} e^{-q_k(2l_k - x)}\right).$$

$$\sum_{t_1,\ldots,t_{n+1}=0}^{\infty} \alpha_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n+1}^{t_{n+1}} e^{-\sqrt{p}(l_1 - l_0)\, t_1} \cdot \ldots \cdot e^{-\sqrt{p}(l_{n+1} - l_n)\, t_{n+1}},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ некоторые однозначно определяемые многочлены, $\omega_{ks,1}, \omega_{ks,2}$ -матрицы размера 1×2, элементы которых- некоторые многочлены. Условия неограниченной разрешимости (11.5) принимают вид:

$\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_{n+1} \neq 0, \quad |\alpha_1| \leq 1, \ldots, |\alpha_{n+1}| \leq 1, Rep \geq \sigma_0 > 0,$

Пусть $p_{ks,j}^t$ $, j = 1, 2; t = (t_1, \ldots, t_{n+1})$ - операторы, определяемые условиями:

$$p_{ks,1}^{t}\left[e^{q_k x}\right] = \omega_{ks,1}\,\eta_1\,\alpha_1^{t_1}\cdot...\alpha_{n+1}^{t_{n+1}}\,e^{q_k x},$$
$$p_{ks,2}^{t}\left[e^{q_k x}\right] = \omega_{ks,2}\,\eta_2\,\alpha_1^{t_1}\cdot...\alpha_{n+1}^{t_{n+1}}\,e^{q_k x},$$
$$t = (t_1, ..., t_{n+1})\,, \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\;;$$

тогда оператор преобразования P_{ks} можно представить в виде:

$$P_{ks}\left[\hat{u}_{ks}\right] = \sum_{1t=0}^{\infty} p_{ks,1}^{t}\left[\hat{u}_{ks}\left(x+\delta\;t\right)\right] + p_{ks,2}^{t_1,...,t_{n+1}}\left[\hat{u}_{ks}\left(2l_k - x + \delta\;t\right)\right]\;,$$

где

$$\delta\;t = \delta_1 t_1 + ... + \delta_{n+1} t_{n+1}.$$

11.5 Уравнение Лапласа в $I_n \times R^m$.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I_n \times R^m$, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y\right) u_k = 0, \;\; k = 1, ..., n+1, \Delta_y = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \tag{11.16}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[u_1\right]\big|_{x=l_0} = f_0\left(y\right), \qquad \Gamma_{n+1}\left[u_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}} = f_{n+1}\left(y\right), y \in R^m \tag{11.17}$$

и условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[u_k\right] - \Gamma_{j2}^{k}\left[u_{k+1}\right] = f_{jk}\left(y\right), \quad x = l_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; j = 1, 2. \tag{11.18}$$

В образах Фурье с неразделенными переменными задача (11.16)-(11.18) принимает вид:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2\right) \tilde{u}_k = 0, \ \ k = 1, ..., n+1, \tag{11.19}$$

по краевым условиям

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 \left[\tilde{u}_1\right]\big|_{x=l_0} = \tilde{f}_0\left(\sigma\right), \\ &\Gamma_{n+1} \left[\tilde{u}_{n+1}\right] \big|_{x=l_{n+1}} = \tilde{f}_{n+1}\left(\sigma\right), \end{aligned} \tag{11.20}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k \left[\tilde{u}_k\right] - \Gamma_{j2}^k \left[\tilde{u}_{k+1}\right] = \tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right) \quad , x = l_k, \ \ k = 1, ..., n, \ \ j = 1, 2. \tag{11.21}$$

Решение задачи (11.19)-(11.21) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x, \sigma\right) = H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|, x, l_0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_0\left(\sigma\right) + H_{j,n}^*\left(\left|\sigma\right|, x, l_{n+1}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{n+1}\left(\sigma\right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} H_{\ j,s}^{\ *}\left(\left|\sigma\right|, x, l_s\right) \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1s}\left(\sigma\right) \\ \tilde{f}_{2s}\left(\sigma\right) \end{pmatrix}. \tag{11.22}$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (11.16)-(11.18) в виде:

$$\begin{aligned} u_j\left(x, y\right) = \int\limits_{R^m} \Bigg(&H_{j,1}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f_0\left(\eta\right) + \\ &+ H_{j,n}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_{n+1}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f_{n+1}\left(\eta\right) + \\ &+ \sum_{s=1}^{n} H_{\ j,s}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_s\right) \begin{pmatrix} f_{1s}\left(\eta\right) \\ f_{2s}\left(\eta\right) \end{pmatrix} \Bigg) d\eta, \end{aligned}$$

где $H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\ j,s}^{\ *}$, т.е.

$$H_{\ j,s}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_s\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m} \int_0^\infty \sigma^{\frac{m}{2}} \frac{J_{\frac{m-2}{2}}\left(\sigma\left|y - \eta\right|\right)}{\left|y - \eta\right|^{\frac{m-2}{2}}} H_{j,s}^*\left(\left|\sigma\right|, x, l_s\right) d\sigma.$$

Из первой теоремы разложения [18] следует формула:

$$H_{\,j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\omega_m\sum_{p=1}^{\infty}v_{j,s}\left(x,\lambda_p\right)Re\left[\left(i\lambda_p\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}\left(i\lambda_p\left|y-\eta\right|\right)}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}\right],$$

$v_{j,s}\left(x,\lambda_p\right)=\varphi_j\left(x,\lambda_p\right)\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\frac{\Omega^*_s(l_s,\lambda_p)}{\omega^{/}_s(\lambda_p)}$, $\omega_m=\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\pi^{-\frac{m+1}{2}}$,

здесь $\mathrm{H}^1_{m/2-1}$ -бесселевы функции третьего рода [19]. Учитывая полученное выражение для функций $H_{\,j,s}$, получим формулу для решения основной задачи (11.16)-(11.18) в виде

$$u_j\left(x,y\right)=\omega_m\sum_{p=1}^{\infty}v_{j,0}\left(x,\lambda_p\right)\int_{R^n}Re\left[\left(i\lambda_p\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_0\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\omega_m\sum_{p=1}^{\infty}v_{j,n+1}\left(x,\lambda_p\right)\int_{R^m}Re\left[\left(i\lambda_p\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}\left(i\lambda_p\left|y-\eta\right|\right)}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f_{n+1}\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\omega_m\sum_{p=1}^{\infty}v_{j,s}\left(x,\lambda_p\right)\int_{R^n}Re\left[\left(i\lambda_p\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}\left(i\lambda_p\left|y-\eta\right|\right)}{\left|y-\eta\right|^{\frac{m-2}{2}}}\right]\begin{pmatrix}f_{1s}\left(\eta\right)\\f_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}d\eta.$$

11.6 Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n\times R^m$.

Рассмотрим следующие задачи Дирихле для полупространства R^{m+1}_+ :

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_0=0, & l_0<x,y\in R^m,\\ \left.\hat{u}_0\right|_{x=l_0}=f_0\left(y\right), & y\in R^m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{n+1}=0, & l<x,y\in R^m\\ \left.\hat{u}_{n+1}\right|_{x=l_0}=f_{n+1}\left(y\right), & y\in R^m\end{cases},$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0, & l_s<x,\ y\in R^m\\ \left.\hat{u}_{js}\right|_{x=l_s}=f_{js}\left(y\right), & y\in R^m, s=1,...,n; j=1,2.\end{cases}.$$

Если $f_0, f_{n+1}, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}(R^m), \beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_0, \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^{m+1}\right)$ [11], которое находится по формуле Пуассона для полупространства. Так же как и в п.6, будем иметь

$$u = P_0[\hat{u}_0] + P_{n+1}[\hat{u}_{n+1}] + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{n} P_{js}[\hat{u}_{js}].$$

Глава 12

Неоднородные краевые задачи для m- гармонических функций в кусочно-однородном полупространстве

12.1 Итерированная задача Штурма- Лиувилля для оператора Фурье.

Рассмотрим задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве I_n^+ нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q_k^2\right)^m y_k=0, \qquad q_k^2=a_k^{-2}\cdot\lambda^2,\ \ a_k>0, k=1,...,n+1, \quad (12.1)$$

по краевым условиям

$$\Gamma_{0s}\left[y_1\right]\Big|_{x=l_0}=0, \qquad \left|\frac{d^s y_{n+1}}{dx^s}\right|\Big|_{x=\infty}<\ \infty, s=0,...,m-1 \qquad (12.2)$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[y_k\right]=\Gamma_{j2}^k\left[y_{k+1}\right]\ , \qquad x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,...,2m, \qquad (12.3)$$

здесь $\Gamma_{0s}, s = 1, ..., m; \Gamma_{j1}^k, \Gamma_{j2}^k - (j = 1, ..., 2m;\ \ k = 1, ..., n)$ некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$. Пусть при некотором λ рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y\left(x, \lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x - l_{k-1}\right) \theta\left(l_k - x\right) y_k\left(x, \lambda\right) + \theta\left(x - l_n\right) y_{n+1}\left(x, \lambda\right).$$

Определим функции $\alpha_{0l} = \alpha_{0l}\left(\sqrt{p}\right)$ $, \alpha_{j1}^k = \alpha_{j1}^k\left(\sqrt{p}\right)$ $, \alpha_{j2}^k = \alpha_{j2}^k\left(\sqrt{p}\right)$, из равенств:

$$\Gamma_{0s}\left[e^{q_1 x}\right] = \alpha_{0s} \cdot e^{q_1 x}, s = 1, ..., m; \Gamma_{ij}^k\left[e^{q_k x}\right] = \alpha_{ij}^k \cdot e^{q_k x}$$

и потребуем выполнения условий

$$\det M_{kj} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^k\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{1j}^k\left(-\sqrt{p}\right) \\ \alpha_{2j}^k\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{2j}^k\left(-\sqrt{p}\right) \end{pmatrix} \neq 0, \tag{12.4}$$

$k = 1, ..., n,\ \ j = 1, 2.$

Обозначим

$\varphi_{n+1,s}\left(x\right) = x^{s-1} e^{q_{n+1} \cdot x \cdot i}$; $\psi_{n+1,s}\left(x\right) = x^{s-1} e^{-q_{n+1} \cdot x \cdot i}, s = 1, ..., m;$ $q_{n+1} = a_{n+1}^{-1} \cdot \sqrt{p}$.

Рекуррентными соотношениями

$$\Gamma_{j1}^k\left(\varphi_{k,s}, \psi_{k,s}\right) = \Gamma_{j2}^k\left(\varphi_{k+1,s}, \psi_{k+1,s}\right), \quad k = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m. \tag{12.5}$$

с учетом условий (12.4) можно определить остальные n пар функций $\left(\varphi_{ks}, \psi_{ks}\right), \quad k = 1, ..., n$. Примем обозначения $\varphi_k = \left(\varphi_{k1}, ..., \varphi_{km}\right), \psi_k = \left(\psi_{k1}, ..., \psi_{km}\right),$

$$\overset{0}{\underset{1s}{\varphi}}\left(\sqrt{p}\right) = \Gamma_{0s}\left[\varphi_1\left(x, \sqrt{p}\right)\right] \Bigg|_{x=l_0}, \overset{0}{\underset{1s}{\psi}}\left(\sqrt{p}\right) = \Gamma_{0s}\left[\psi_1\left(x, \sqrt{p}\right)\right] \Bigg|_{x=l_0},$$

$i = 1, ..., n+1,$

$$\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}\left(\sqrt{p}\right) = \begin{pmatrix} \overset{0}{\underset{11}{\varphi}} \\ \vdots \\ \overset{0}{\underset{1m}{\varphi}} \end{pmatrix}, \overset{0}{\underset{1}{\psi}}\left(\sqrt{p}\right) = \begin{pmatrix} \overset{0}{\underset{11}{\psi}} \\ \vdots \\ \overset{0}{\underset{1m}{\psi}} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^k\left[\varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right)\right]\Big| = \varphi_{ij}^k\left(x, \sqrt{p}\right)\ ; \Gamma_{ij}^k\left[\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right)\right]\Big| = \psi_{ij}^k\left(x, \sqrt{p}\right),$$

$i = 1, 2; j = 1, ..., 2m; k = 1, ..., n$

$$\Omega_k\left(\xi, \sqrt{p}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}^k & \psi_{11}^k \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{1m}^k & \psi_{1m}^k \end{pmatrix}.$$

Считаем в дальнейшем выполненными условия неограниченной разрешимости задачи

$$\det \Omega_k \neq 0,\ \ k = 1, ..., n; Rep \geq \sigma_0 > 0, \tag{12.6}$$

Теорема 12.1 *Спектр задачи (12.1)-(12.3) непрерывен и заполняет всю полуось* $(0, \infty)$. *В качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению* λ, *можно взять функцию*

$$\varphi\left(x, \lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x - l_{k-1}\right) \theta\left(l_k - x\right) \varphi_k\left(x, \lambda\right) + \theta\left(x - l_n\right) \varphi_{n+1}\left(x, \lambda\right). \tag{12.7}$$

12.2 Уравнение Лапласа в R^2_{n+}.

Введем вектор- функции влияния $H^*_{k,s}$ по формулам:

при $k < s$

$$H^*_{k,s} = \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} \Omega_s^{-1} - \psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \cdot \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \end{pmatrix} \Omega_s^{-1},$$
$$k, s = 1, ..., n+1;$$

при $k > s$

$$H^*_{k,s} = \psi_k\left(x\right) \cdot \left\{ - \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \cdot \underset{1}{\overset{0}{\varphi}} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}\left(\xi\right) - \begin{pmatrix} 0 & E \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}\left(\xi\right) \right\},$$
$$l_{k-1} < x < l_k,\ \ l_{s-1} < \xi < l_s;$$

при $k = s$

$$H_{k,k}^{*}=\begin{cases}\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\left(\begin{array}{cc}\mathrm{E} & 0\end{array}\right)\Omega_k^{-1}-\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\overset{0}{\varphi}_1\left(\begin{array}{cc}0 & \mathrm{E}\end{array}\right)\Omega_k^{-1}\ , \\ l_{k-1}<x<\xi<l_k, \\ \psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\cdot\left\{-\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\cdot\underset{1}{\overset{0}{\varphi}}\cdot\left(\begin{array}{cc}\mathrm{E} & 0\end{array}\right)\ \Omega_k^{-1}-\left(\begin{array}{cc}0 & \mathrm{E}\end{array}\right)\ \Omega_k^{-1}\right\}\ , \\ l_{k-1}<\xi<x<l_k,\quad k=1,...,n+1;\end{cases}$$

здесь через $0, E$ обозначены - нулевая и единичная матрицы размера $m\times m$, соответственно. Вектор- функции $H_{k,s}^{*}\left(\sqrt{p},x,\xi\right)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи (12.6).

Рассмотрим задачу о решении сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-q_k^2\right)^m z_k=0,\ \ q_k^2=a_k^{-2}\cdot p,\ \ k=1,...,n, \tag{12.8}$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{c}\Gamma_{0s}\left[z_1\right]\big|_{x=l_0}=g_{0s}, s=1,...,m,\\ \left|\frac{d^s z_{n+1}}{dx^s}\right|\Big|_{x=\infty}<\ \infty, s=0,...,m-1,\end{array} \tag{12.9}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[z_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[z_{k+1}\right]=g_{jk},\quad x=l_k,\ \ k=1,...,n,\ \ j=1,...,2m. \tag{12.10}$$

Непосредственная проверка показывает, что решение задачи (12.8)-(12.10) выражается с помощью функций влияния $H_{k,s}^{*}$:

$$z_j\left(x\right)=H_{j,1}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_0\right)\left(\begin{array}{c}0\\ \mathrm{E}\end{array}\right)\ g_0+\sum_{s=1}^{n}H_{j,s}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_s\right)\ g_s,$$

где

$$g_0=\left(\begin{array}{c}g_{01}\\ \vdots\\ g_{0m}\end{array}\right), g_s=\left(\begin{array}{c}g_{s,1}\\ \vdots\\ g_{s,2m}\end{array}\right).$$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $R_{n+}^2=I_n^+\times(-\infty,\infty)$ решения сепаратной системы итерированных уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m u_k=0,\;\; k=1,...,n+1, \tag{12.11}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_{0e}\left[u_1\right]\Big|_{x=l_0}=f_{0e}\left(y\right), \qquad \left|\frac{d^s u_{n+1}}{dx^s}\right|\Big|_{x=\infty}<\infty \tag{12.12}$$

$s=1,...,m\;;\;-\infty<y<\infty$

и условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x=l_k$:

$$\Gamma_{j1}^k\left[u_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[u_{k+1}\right]=f_{jk}\left(y\right)\quad ,x=l_k,\;\; k=1,...,n,\;\; j=1,...,2m. \tag{12.13}$$

В образах Фурье по переменной y задача (12.11)-(12.13) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)^m\tilde{u}_k=0,\;\;\; k=1,...,n+1, \tag{12.14}$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l}\Gamma_{0s}\left[\tilde{u}_1\right]|_{x=l_0}=\tilde{f}_{0s}\left(\sigma\right),s=1,,...,m\;;\quad -\infty<y<\infty,\\ \left|\frac{d^s\tilde{u}_{n+1}}{dx^s}\right|\Big|_{x=\infty}<\infty, s=0,...,m-1,\end{array} \tag{12.15}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk},\left(\sigma\right)\quad ,x=l_k, \tag{12.16}$$

$k=1,...,n,\;\; j=1,...,2m.$

Решение задачи (12.14)-(12.16) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_0\right)\,\left(\begin{array}{c}0\\ \mathrm{E}\end{array}\right)\tilde{f}_0\left(\sigma\right)+\sum_{s=1}^{n}H_{\;j,s}^{\,*}\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)\;\tilde{f}_s\left(\sigma\right), \tag{12.17}$$

где

$$\tilde{f}_0(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{01} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0m} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_s(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1,s} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{2m,s} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, найдем формулу для решений задачи (12.11)-(12.13):

$$u_j(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_{j,1}(x, |\eta - y|, l_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_0(\eta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{n} H_{j,s}\ (x, |\eta - y|, l_s) f_s\ (\eta) \right) d\eta,$$

где

$$f_0(\eta) = \begin{pmatrix} f_{01} \\ \vdots \\ f_{0m} \end{pmatrix},\ f_s(y) = \begin{pmatrix} f_{1,s} \\ \vdots \\ f_{2m,s} \end{pmatrix},$$

$H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\ *}_{j,s}$, т.е.
$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma|\eta - y|} H^{*}_{j,s}(|\sigma|, x, l_s)\, d\sigma.$

Вычисляя интеграл методом контурного интегрирования, получаем формулу для $H_{\ j,s}$:

$$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v_j(x,\lambda) \left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\ \overset{0}{\psi}{}_1^{-1} \right) \Omega_s^{-1}(l_s, \lambda)\, e^{-\lambda|\eta - y|} \lambda d\lambda,$$
$$v_j(x,\lambda) = \varphi_j(x,\lambda)\, \overset{0}{\varphi}{}_1^{-1} - \psi_j(x,\lambda)\, \overset{0}{\psi}{}_1^{-1}.$$

Из полученного выражения для $H_{\ j,s}$ следует формула для решения основной задачи (12.11)-(12.13):

$$u_j(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v_{j0}(x,\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|\eta - y|} f_0(\eta)\, d\eta \right) \lambda d\lambda +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_{js}(x,\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda|\eta-y|}f_s(\eta)\,d\eta\right)\lambda d\lambda,$$

где

$$v_{j0}(x,\lambda)=v_j(x,\lambda)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_1^{-1}(l_0,\lambda),$$

$$v_{js}(x,\lambda)=v_j(x,\lambda)\left(\overset{0}{\varphi}{}_1^{-1}\,\overset{0}{\psi}{}_1^{-1}\right)\Omega_s^{-1}(l_s,\lambda).$$

12.3 Краевые задачи и операторы преобразования для итерированного уравнения Лапласа

Рассмотрим следующие задачи Дирихле для полуплоскости:

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{0l}=0, \quad 0<x,-\infty<y<\infty,\\ \left.\hat{u}_{0\text{s}}\right|_{x=l_0}=f_{0s}(y),s=1,...,m; \quad -\infty<y<\infty;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0, \quad 0<x,\ -\infty<y<\infty,\\ \left.\hat{u}_{js}\right|_{x=l_s}=f_{js}(y), \quad -\infty<y<\infty,\\ s=1,...,n;j=1,...,2m.\end{cases}$$

Если $f_{0e},f_{js}\in H_2^{\beta-1/2}(R^1)$, $\beta\geq 1$, то у каждой из указанных задач существует, единственное решение $\hat{u}_{0e},\hat{u}_{js}\in H_2^{\beta}\left(R_+^2\right)$ [11]. Основную формулу для решения краевой задачи (12.14)-(12.16) можно преобразовать к виду:

$$u_k(x,y)=\int_0^\infty v_{k0}(x,\lambda)\ \begin{pmatrix}0\\ \text{E}\end{pmatrix}\ \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_0(\xi,y)\,d\xi\right)\lambda d\lambda+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_s(\xi,y)\ d\xi\right)\lambda d\lambda,$$

где

$$\hat{u}_0(x,y)=\begin{pmatrix}\hat{u}_{01}\\ \vdots\\ \hat{u}_{0m}\end{pmatrix},\ \hat{u}_s(x,y)=\begin{pmatrix}\hat{u}_{1,s}\\ \vdots\\ \hat{u}_{2m,s}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы определили серию операторов преобразования

$$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0, u_0\left(x,\lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k - x\right)\,u_{0,\,k}\left(x,\lambda\right)$$
$$+\,\theta\left(x-l_n\right)\,u_{0,\,n+1}\left(x,\lambda\right):$$

$$u_{0,k}\left(x,y\right) = \int_0^\infty v_k\left(x,\lambda\right)\left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\,\overset{0}{\psi_1^{-1}}\right)\Omega_1^{-1}\left(l_0,\lambda\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathrm{E} \end{array}\right)$$
$$\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_0\left(\xi,y\right)d\xi\right)\lambda d\lambda,$$

а также серию операторов

$$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js},\, u_{js}\left(x,\lambda\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k - x\right)\,u_{js,k}\left(x,\lambda\right)\ :$$

$$u_{s,k} = \int_0^\infty v_k\left(x,\lambda\right)\left(\overset{0}{\varphi_1^{-1}}\,\overset{0}{\psi_1^{-1}}\right)\Omega_s^{-1}\left(l_s,\lambda\right)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\ \hat{u}_s\left(\xi,y\right)\ d\xi\right)\lambda d\lambda.$$

Теорема 12.2 *Пусть выполнены условия неограниченной разрешимости задачи (12.6) и пусть справедливы неравенства:*

$$\|\omega_{j0,k}\| \le \frac{c_0}{\left(1+\lambda^2\right)^{\alpha_0/2}}, j=1,2; k=1,..,n+1; c_0>0, \alpha_0 \ge 0,$$
$$\|\omega_{js,k}\| \le \frac{c_{js}}{\left(1+\lambda^2\right)^{\alpha_{js}/2}}, k=1,...,n+1; c_{js}>0, \alpha_{js} \ge 0,$$

в которых вектор- функции $\omega_{10,k}, \omega_{20,k},\ \omega_{js,k}$ *определены условиями:*

$$v_{k0}\left(x,\lambda\right) = \omega_{10,k}\ e^{iq_k x} + \omega_{20,k}\ e^{iq_k(2l_k - x)},$$
$$v_{ks}\left(x,\lambda\right) = \omega_{1s,k}\ e^{iq_k x} + \omega_{2s,k}\ e^{iq_k(2l_k - x)};$$

тогда оператор $P_0\ :\ \hat{f}_0\ \to\ f_0$ *осуществляет непрерывное отображение пространств* $H_2^\beta\left(R_+\right)$ *и* $H_2^{\alpha_0+\beta}\left(R_{n,+}\right)$, *операторы* $P_{js}\ :\ \hat{f}_{js}\ \to\ f_{js}$ *осуществляют непрерывное отображение пространств* $H_2^\beta\left(R_+\right)$ *и* $H_2^{\alpha_{js}+\beta}\left(R_{n,+}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $P_0 : \hat{f}_0 \to f_0$, где

$$f_0\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k - x\right)\,f_{0\,k}\left(x\right)\ +\ \theta\left(x-l_n\right)\,f_{0\,n+1}\left(x\right).$$

Для функции f_{0k} имеем интегральное представление:

$f_{0k}(x) = \int_0^\infty \left(\omega_{10,k}\, e^{iq_k x} + \omega_{20,k}\, e^{iq_k(2l_k - x)}\right)\, F_s\left[\hat{f}_0\right] \lambda d\lambda,$

где $F_s\left[\hat{f}_0\right]$ - синус преобразование функции $\hat{f}_0$. Из условия теоремы имеем:

$\left(1+\lambda^2\right)^{\beta/2} F_s\left[\hat{f}_0\right] \in L_2\left(R_+\right).$

Следовательно,

$\left(1+\lambda^2\right)^{(\alpha_0+\beta)/2} \omega_{j0,k} F_s\left[\hat{f}_0\right] \in L_2\left(R_+\right), j = 1, 2.$

Аналогично изучается случай операторов P_{js}.

Следствие 12.1. Если $f_{0l}, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right)$, $\beta \geq 1$, то существует и единственное решение $u \in H_2^{\alpha+\beta,\beta}, \alpha = \min\left(\alpha_{0l}, \alpha_{js}\right)$ общей краевой задачи (12.11)-(12.13).

Доказательство. Утверждение немедленно получается из теоремы 12.2, если заметить, что решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования по формуле

$$u = P_0\left[\hat{u}_0\right] + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

12.4 Итерированное уравнение Лапласа в $R_{n,+}^{q+1}$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $R_{n,+}^{q+1} = I_n^+ \times R^q$, решения сепаратной системы итерированных уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y\right)^m u_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1, \Delta_{\text{y}} = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}, \tag{12.18}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_{0s}\left[u_1\right]\big|_{x=l_0} = f_{0s}(y), \quad \left|\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial x^s}\right|\Bigg|_{x=\infty} < \infty, s = 0, ..., m-1; \quad y \in R^q \tag{12.19}$$

и условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma^k_{j1}\left[u_k\right] - \Gamma^k_{j2}\left[u_{k+1}\right] = f_{jk}\left(y\right), \quad x = l_k, \;\; k = 1,...,n, \;\; j = 1,...,2m. \quad (12.20)$$

В образах Фурье по переменным y задача (12.18)-(12.20) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2\right)^m \tilde{u}_k = 0, \quad k = 1,...,n+1, \qquad (12.21)$$

по краевым условиям

$$\Gamma_{0s}\left[\tilde{u}_1\right]\big|_{x=l_0} = \tilde{f}_{0s}\left(\sigma\right), \quad \left|\frac{d^s \tilde{u}_{n+1}}{dx^s}\right|\,\Big|_{x=\infty} < \infty \qquad (12.22)$$

$s = 0,...,m-1; \quad y \in R^q$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma^k_{j1}\left[\tilde{u}_k\right] - \Gamma^k_{j2}\left[\tilde{u}_{k+1}\right] = \tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right) \quad , x = l_k, \;\; k = 1,...,n, \;\; j = 1,...,2m. \quad (12.23)$$

Решение задачи (12.21)-(12.23) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right) = H^*_{j,1}\left(\left|\sigma\right|, x, l_0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \tilde{f}_0\left(\sigma\right) + \sum_{s=1}^{n} H^{\,*}_{\;j,s}\left(\left|\sigma\right|, x, l_s\right) \; \tilde{f}_s\left(\sigma\right),$$

где

$$\tilde{f}_0\left(\sigma\right) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{01} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0m} \end{pmatrix}, \; \tilde{f}_s\left(\sigma\right) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{s,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{s2,m} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (12.21)-(12.23) в виде:

$$u_j\left(x,y\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_{j,1}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_0\left(\eta\right) + \sum_{s=1}^{n} H_{\;j,s}\left(x, \left|\eta - y\right|, l_s\right) f_s\;\left(\eta\right)\right) d\eta,$$

где

$$f_0(\eta)=\begin{pmatrix} f_{01}\\ \vdots\\ f_{0m}\end{pmatrix},\ f_s(y)=\begin{pmatrix} f_{s1}\\ \vdots\\ f_{s2m}\end{pmatrix},$$

$H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\ *}_{j,s}$, т.е.

$$H_{\ j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^q}\int_0^\infty \sigma^{\frac{q}{2}}\frac{J_{\frac{q-2}{2}}(\sigma|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}}H^*_{j,s}(|\sigma|,x,l_s)\,d\sigma.$$

Для оригиналов функций влияния $H_{\ j,s}$ получаем формулу:

$$H_{\ j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\omega_q\int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda)\,Re\left[(i\lambda)^{\frac{q}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}}\right]d\sigma,$$

где

$H^1_{\frac{q-2}{2}}$ -бесселевы функции третьего рода [19], $\omega_q=\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\pi^{-\frac{q+1}{2}}$.

Формулу для решения основной задачи (12.18)-(12.20) можно преобразовать к виду:

$u_j(x,y)=$

$$\omega_q\int_0^\infty v_{j,0}(x,\lambda)\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{E}\end{pmatrix}\left(\int_0^\infty Re\left[(i\lambda)^{\frac{q}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}}\right]f_0(\eta)\,d\eta\right)\lambda d\lambda+$$

$$+\omega_q\sum_{s=1}^n\int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda)\left(\int_0^\infty Re\left[(i\lambda)^{\frac{q}{2}}\frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}}\right]f_s(\eta)\,d\eta\right)\lambda d\lambda.$$

12.5 Краевые задачи и операторы преобразования в $R^{q+1}_{n,+}$.

Рассмотрим модельные задачи Дирихле для полупространства:

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{0s}=0,\quad 0<x,y\in R^q,\\ \hat{u}_{0s}\big|_{x=l_0}=f_0(y),s=1,...,m;\quad y\in R^q;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{js}=0,\quad 0<x,\ y\in R^q,\\ \hat{u}_{js}\big|_{x=l_s}=f_{js}(y),\quad y\in R^q,\\ s=1,...,n;j=1,...,2m.\end{cases}$$

Если $f_{0s}, f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}\left(R^1\right)$, $\beta \geq 1$, то у каждой из указанных задач существует единственное решение $\hat{u}_{0s}, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^2\right)$ [11], и тогда формулу для решения основной краевой задачи можно привести к виду:

$$u = P_0\left[\hat{u}_0\right] + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

Глава 13

Неоднородные краевые задачи для m- гармонических функций в кусочно-однородном пространстве

13.1 Задача Штурма- Лиувилля для итерированного оператора Фурье в I_n.

Рассмотрим задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве I_n нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^m y_k=0\;; a_k>0, k=1,...,n+1, \tag{13.1}$$

по условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[y_k\right]=\Gamma_{j2}^k\left[y_{k+1}\right]\;,\quad x=l_k,\;\; k=1,...,n;\;\; j=1,...,2m; \tag{13.2}$$

здесь $\Gamma_{j1}^k,\Gamma_{j2}^k\left(j=1,...,2m;\;\; k=1,...,n\right)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$.

Пусть функции $\alpha_{j1}^k=\alpha_{j1}^k\left(\sqrt{p}\right),\alpha_{j2}^k=\alpha_{j2}^k\left(\sqrt{p}\right)$ определены условиями:

$\Gamma_{ij}^{k}\left[e^{q_k x}\right] = \alpha_{ij}^{k} \cdot e^{q_k x}, q_k = a_k^{-1}\sqrt{p},\ i,j = 1,...,2m; k = 1,...,n,$
и пусть выполнены условия

$$\det M_{kj} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^{k}\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{1j}^{k}\left(-\sqrt{p}\right) \\ \alpha_{2j}^{k}\left(\sqrt{p}\right) & \alpha_{2j}^{k}\left(-\sqrt{p}\right) \end{pmatrix} \neq 0,\ \ Rep > \sigma_0 > 0 \qquad (13.3)$$
$$k = 1,...,n,\ \ j = 1,2.$$

Обозначим
$\varphi_{0,s}\left(x,\sqrt{p}\right) = x^{s-1}e^{q_0 \cdot x \cdot i};\ \ \psi_{n+1,s}\left(x,\sqrt{p}\right) = x^{s-1}e^{-q_{n+1}\cdot x \cdot i},$
$s = 1,...,m;\ \ q_{n+1} = a_{n+1}^{-1} \cdot \sqrt{p}.$
Рекуррентными соотношениями

$$\Gamma_{j1}^{k}\left(\varphi_{k+1,s}\right) = \Gamma_{j2}^{k}\left(\varphi_{k,s}\right)\ ,$$
$$\Gamma_{j1}^{k}\left(\psi_{k,s}\right) = \Gamma_{j2}^{k}\left(\psi_{k+1,s}\right)\ ,\quad k = 1,...,n,\quad j = 1,...,m$$

определим остальные n пар вектор- функций $\left(\varphi_{ks}, \psi_{ks}\right),\ \ k = 1,...,n.$ Заметим, что функции $\left(\varphi_{ke}, \psi_{ke}\right),\quad k = 1,...,n$ определены корректно ввиду условия (13.3). Примем обозначения

$$\varphi_k = \left(\varphi_{k1},...,\varphi_{km}\right), \psi_k = \left(\psi_{k1},...,\psi_{km}\right),$$

$$\Gamma_{ij}^{k}\left[\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right] = \varphi_{ij}^{k}\left(x,\sqrt{p}\right);$$
$$\Gamma_{ij}^{k}\left[\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right] = \psi_{ij}^{k}\left(x,\sqrt{p}\right),$$
$$\Omega_k\left(\xi,\sqrt{p}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}^{k} & \psi_{11}^{k} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{1m}^{k} & \psi_{1m}^{k} \end{pmatrix}.$$

Всюду ниже потребуем выполнения условий неограниченной разрешимости задачи:

$$\det \Omega_k \neq 0,\ \ k = 1,...,n; Rep \geq \sigma_0 > 0 \qquad (13.4)$$

Теорема 13.1 *Спектр задачи (13.1)-(13.3) непрерывен и заполняет всю числовую ось* $(-\infty,\infty)$. *В качестве собственной функции, соответствующей собственному значению* λ, *можно взять функцию:*

$$u\left(x,\lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x - l_{k-1}\right)\theta\left(l_k - x\right)\quad u_k\left(x,\lambda\right) + \theta\left(l_0 - x\right)\quad u_0\left(x,\lambda\right) +$$
$$+\theta\left(x - l_n\right)\ \ u_{n+1}\left(x,\lambda\right).$$

13.2 Итерированное уравнение Лапласа в R_n^2.

В силу условий неограниченной разрешимости задачи можно вести функции влияния $H_{k,s}^*$ по формулам:

при $k < s$

$$\begin{array}{l} H_{k,s}^* = \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \quad, \\ l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s, \end{array}$$

при $k > s$

$$\begin{array}{l} H_{k,s}^* = -\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E} \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \;, \\ \quad l_{k-1} < x < l_k, \;\; l_{s-1} < \xi < l_s, \end{array}$$

при $k = s$

$$H_{k,s}^* = \begin{cases} \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \end{pmatrix} \;\Omega_k^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \;, \\ l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E} \end{pmatrix} \;\Omega_s^{-1}\left(\xi\right), \\ l_{k-1} < \xi < x < l_k; \end{cases}$$

здесь через 0, E обозначены - нулевая и единичная матрицы размера $m \times m$, соответственно. Функции влияния $H_{j,s}^*$ позволяют найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - q_k^2\right)^m z_k = 0, \;\; q_k^2 = a_k^{-2} \cdot p, \;\; k = 1, ..., n+1, \tag{13.5}$$

по условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[z_k\right] - \Gamma_{j2}^k\left[z_{k+1}\right] = g_{jk}, \quad x = l_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., 2m \tag{13.6}$$

Непосредственная проверка показывает, что решение задачи (13.5)-(13.6) имеет вид:

$$z_j\left(x\right) = \sum_{s=0}^{n} H_{j,s}^*\left(\sqrt{p}, x, l_s\right)\; g_s,$$

где

$$g_s = \begin{pmatrix} g_{s1} \\ \vdots \\ g_{s,2m} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I_n \times (-\infty, \infty)$, решения сепаратной системы итерированных уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^m u_k = 0, \;\; k = 1, ..., n+1, \tag{13.7}$$

по условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma_{j1}^k [u_k] - \Gamma_{j2}^k [u_{k+1}] = f_{jk}(y) \quad , x = l_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., 2m. \tag{13.8}$$

В образах Фурье по переменной y задача (13.7)-(13.8) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2 \right)^m \tilde{u}_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1, \tag{13.9}$$

по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k [\tilde{u}_k] - \Gamma_{j2}^k [\tilde{u}_{k+1}] = \tilde{f}_{jk}, (\sigma) \quad , x = l_k, \;\; k = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., 2m. \tag{13.10}$$

Решение задачи (13.9)-(13.10) имеет структуру:

$$\tilde{u}_j (x, \sigma) = \sum_{s=1}^{n} H_{\;j,s}^{\,*} (|\sigma|, x, l_s) \;\; \tilde{f}_s (\sigma), \tag{13.11}$$

где

$$\tilde{f}_s (\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{s1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{s,2m} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (13.7)-(13.8) в виде

$$u_j(x,y)=\sum_{s=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}H_{j,s}(x,|\eta-y|,l_s)\,f_s\ (\eta)\,d\eta,$$

где

$f_s(y)=\begin{pmatrix} f_{s1}\\ \vdots \\ f_{s,2m}\end{pmatrix},$

$H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\ *}_{j,s}$, т.е.

$H_{\ j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma|\eta-y|}H^{*}_{j,s}(|\sigma|,x,l_s)\,d\sigma.$

Перенося контур интегрирования на действительную отрицательную полуось преобразуем выражение для функций $H_{\ j,s}$:

$H_{\ j,s}(x,|\eta-y|,l_s)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}v_{js}(x,\lambda)\,e^{-\lambda|\eta-y|}\lambda d\lambda,$

где

$v_{js}(x,\lambda)=v_j(x,\lambda)\begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0\end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(l_s,\lambda)\,.$

В итоге, формулу для решения основной задачи (13.7)-(13.8) представим в виде:

$$u_j(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{0}^{\infty}v_{js}(x,\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda|\eta-y|}f_s(\eta)\,d\eta\right)\lambda d\lambda. \qquad (13.12)$$

13.3 Краевые задачи и операторы преобразования в R^2_n.

Если $f_{js}\in H_2^{\beta-1/2}(R^1)$, $\beta\geq 1$, то у каждой из задач Дирихле для правой полуплоскости R^2_+ :

$$\begin{aligned}&\Delta\hat{u}_{js}=0,\quad 0<x,\ -\infty<y<\infty,\\ &\hat{u}_{js}|_{x=l_s}=f_{js}(y)\,,\quad -\infty<y<\infty, s=1,...,n; j=1,...,2m,\end{aligned}$$

существует единственное решение $\hat{u}_{js}\in H_2^{\beta}\left(R^2_+\right)$, которое находится по формуле Пуассона. В результате формулу (13.12) можно переписать в виде:

$u_k(x,y) =$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty v_k(x,\lambda)\begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(l_s,\lambda)\left(\int_0^\infty sin\lambda\xi\,\hat{u}_s(\xi,y)\,d\xi\right)\lambda d\lambda.$$

Таким образом, можно определить серию операторов преобразования:

$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js}, j = 1, ..., 2m.$

Теорема 13.2 *Пусть выполнены условия (13.4) неограниченной разрешимости задачи и пусть справедливы неравенства:*

$$\begin{array}{l} \|\omega_{js,k}\| \le \frac{c_{js}}{(1+\lambda^2)^{\alpha_{js}/2}}, \\ k = 0, 1, ..., n+1; c_{js} > 0, \alpha_{js} \ge 0 \end{array},$$

в которых вектор- функции $\omega_{js,k}$ определены условиями

$$v_k(x,\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\Omega_s^{-1}(l_s,\lambda) = \omega_{1s,k}\,e^{iq_kx} + \omega_{2s,k}\,e^{iq_k(2l_k-x)};$$

тогда операторы $P_{js} : \hat{f}_{js} \to f_{js}$ осуществляют непрерывное отображение пространств $H_2^\beta\left(R_+\right)$ и $H_2^{\alpha_{js}+\beta}\left(R_{n,+}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $P_{js} : \hat{f}_{js} \to f_{js}$,

где

$$f_{js}(x) = \sum_{k=0}^{n+1}\theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\,f_{js\,k}(x)\ .$$

Для функции $f_{js,k}$ имеем интегральное представление:

$$f_{js,k}(x) = \int_0^\infty\left(\omega_{1js,k}\,e^{iq_kx} + \omega_{2js,k}\,e^{iq_k(2l_k-x)}\right)\,F_s\left[\hat{g}_{js}\right]\lambda d\lambda,$$

где $F_s\left[\hat{f}_{js}\right]$ - синус преобразование функции $\hat{f}_{js}$. Из условия теоремы следует что:

$\left(1+\lambda^2\right)^{\beta/2}F_s\left[\hat{f}_{js}\right] \in L_2(R_+)\,.$

Следовательно,

$\left(1+\lambda^2\right)^{(\alpha_{js}+\beta)/2}\omega_{js,k}F_s\left[\hat{f}_{js}\right] \in L_2(R_+)\,, j = 1, 2.$

Следствие 13.1. Если $f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}(R^1)$ $,\beta \ge 1$, то существует единственное решение $u \in H_2^{\alpha+\beta,\beta}, \alpha = \min\alpha_{js}$ основной краевой задачи (13.7)-(13.8).

Доказательство. Решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования, по формуле

$$u = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js} \left[\hat{u}_{js} \right],$$

поэтому утверждение вытекает из теоремы 13.2

13.4 Итерированное уравнение Лапласа в R_n^{q+1}

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $R_n^{q+1} = I_n \times R^q$, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y \right)^q u_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1, \tag{13.13}$$

$$\Delta_y = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2},$$

по условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma_{j1}^k \left[u_k \right] - \Gamma_{j2}^k \left[u_{k+1} \right] = f_{jk}(y) \ , \quad x = l_k, \quad k = 1, ..., n, \ \ j = 1, ..., 2m. \tag{13.14}$$

В образах Фурье по переменной y задача (13.13)-(13.14) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2 \right)^q \tilde{u}_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1 \tag{13.15}$$

по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k \left[\tilde{u}_k \right] - \Gamma_{j2}^k \left[\tilde{u}_{k+1} \right] = \tilde{f}_{jk}(\sigma) \qquad , x = l_k, \tag{13.16}$$

$k = 1, ..., n, \ \ j = 1, ..., 2m,$

Решение задачи (13.15)-(13.16) имеет вид:

$$\tilde{u}_j(x,\sigma) = \sum_{s=1}^{n} H^*_{j,s}(|\sigma|, x, l_s)\ \tilde{f}_s(\sigma),$$

где

$$\tilde{f}_s(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{s,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{s,2m} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (13.13)-(13.14) в виде

$$u_j(x,y) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s)\ f_s\ (\eta)\, d\eta,$$

где

$$f_s(y) = \begin{pmatrix} f_{s,1} \\ \vdots \\ f_{s,2m} \end{pmatrix},$$

$H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\ *}_{j,s}$, т.е.
$$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^q} \int_0^{\infty} \sigma^{\frac{q}{2}} \frac{J_{\frac{q-2}{2}}(\sigma |y - \eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}} H^*_{j,s}(|\sigma|, x, l_s)\, d\sigma.$$

Перенеся контур интегрирования на действительную отрицательную полуось, получим формулу для $H_{\ j,s}$:

$$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \omega_q \int_0^{\infty} v_{j,s}(x,\lambda)\, Re \left[(i\lambda)^{\frac{q}{2}} \frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda |y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}} \right] d\sigma,$$

$$v_{j,s}(x,\lambda) = \varphi_j(x,\lambda) \begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \end{pmatrix} \Omega_s^{-1}(l_s, \lambda),$$
$$\omega_q = \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \pi^{-\frac{q+1}{2}}.$$

В результате формулу для решения основной задачи (13.13)-(13.14) можно представить в виде:
$$u_j(x,y) = \omega_q \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty v_{j,s}(x,\lambda) \left(\int_0^\infty Re \left[(i\lambda)^{\frac{q}{2}} \frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{q-2}{2}}} \right] f_s(\eta)\, d\eta \right) \lambda d\lambda.$$

13.5 Краевые задачи и операторы преобразования в R_n^{q+1}.

Если $f_{js} \in H_2^{\beta-1/2}(R^q)$, $\beta \geq 1$, то у каждой из задач Дирихле для полупространства R_+^{q+1} :
$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{js} = 0, \quad l_s < x, \; y \in R^q, \\ \hat{u}_{js}\big|_{x=l_s} = f_{js}(y), \quad y \in R^q, \\ s = 1, ..., n; j = 1, ..., 2m; \end{cases}$$
существует единственное решение $\hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^{q+1}\right)$, которое находится по формуле Пуассона. В результате формулу (13.12) можно переписать в терминах функций $\hat{u}_{js}$:

$$u_k(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty v_{ks}(x,\lambda) \left(\int_0^\infty sin\lambda\xi \; \hat{u}_s(\xi,y) \; d\xi \right) \lambda d\lambda.$$

Таким образом, можно определить серию операторов преобразования:

$$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js}, j = 1, ..., 2m.$$

Решение рассматриваемой краевой задачи (13.15)-(13.16) можно выразить с помощью операторов преобразования, по формуле:

$$u = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

Глава 14

Неоднородные краевые задачи для функций, $m-$гармонических в кусочно-однородной полосе

14.1 Задача Штурма- Лиувилля для итерированного оператора Фурье в I_n .

Рассмотрим задачу Штурма- Лиувилля о конструкции ограниченного на множестве I_n нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^m y_k = 0\ , \quad k = 1, ..., n+1 \tag{14.1}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_{0s}\left[y_1\right]\big|_{x=l_0} = 0, \Gamma_{n+1,s}\left[y_{n+1}\right]\big|_{x=l_0} = 0, s = 1, ..., m \tag{14.2}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^k\left[y_k\right] = \Gamma_{j2}^k\left[y_{k+1}\right]\ , \quad x = l_k,\ k = 1, ..., n,\ j = 1, 2, \tag{14.3}$$

здесь

$$\Gamma_{0,s}, \Gamma_{n+1,s}, s=1,...,m; \Gamma^k_{j1}, \Gamma^k_{j2} \ \ (j=1,....,2m; \ \ k=1,...,n) -$$

некоторые операторы, перестановочные с оператором $\frac{d}{dx}$.

Обозначим через $\psi_{n+1,q}\left(x,\sqrt{p}\right)$ $,q=1,...,m$ любые m линейно- независимых решений дифференциального уравнения (14.1), удовлетворяющих граничным условиям:

$$\Gamma_{n+1,\text{s}}\left[\psi_{n+1,q}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=0, s=1,...,m$$

Рекуррентными соотношениями

$$\Gamma^k_{j1}\left(\psi_{k,q}\right)= \ \Gamma^k_{j2}\left(\psi_{k+1,q}\right) \ \ , \quad k=1,...,n, \quad j=1,...,m$$

определим n вектор-функций

$\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)=\left(\psi_{k1}\left(x,\sqrt{p}\right),...,\psi_{km}\left(x,\sqrt{p}\right)\right).$

Аналогично через $\varphi_{1,q}\left(x,\sqrt{p}\right),q=1,...,m$ обозначим любые m- линейно независимых решений дифференциального уравнения (14.1), удовлетворяющих граничному условию:

$\Gamma_{0s}\left[\varphi_{1q}\right]\big|_{x=l_0}=0, s=1,...,m.$

Рекуррентными соотношениями

$$\Gamma^k_{j1}\left(\varphi_{k+1,q}\right)= \ \Gamma^k_{j2}\left(\varphi_{k,q}\right) \ \ , \quad k=1,...,n, \quad j=1,...,m$$

определим остальные n вектор-функций $\varphi_{k,s}\left(x,\sqrt{p}\right),s=1,...,m,$

$\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)=\left(\varphi_{k1}\left(x,\sqrt{p}\right),...,\varphi_{km}\left(x,\sqrt{p}\right)\right).$

Примем также обозначения:

$\Gamma^k_{ij}\left[\varphi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]=\varphi^k_{ij}\left(x,\sqrt{p}\right),i=1,2;j=1,...,2m;k=1,...,n,$

$\Gamma^k_{ij}\left[\psi_k\left(x,\sqrt{p}\right)\right]\big|=\psi^k_{ij}\left(x,\sqrt{p}\right),i=1,2;j=1,...,2m;k=1,...,n,$

$$\Omega_k\left(\xi,\sqrt{p}\right)=\left(\begin{array}{cc}\varphi^k_1 & \psi^k_2\end{array}\right),$$

где

$$\varphi^k_1\left(\xi,\sqrt{p}\right)=\begin{pmatrix}\varphi^k_{1,1}\\ \\ \varphi^k_{1,2m}\end{pmatrix} \ \psi^k_1\left(\xi,\sqrt{p}\right)=\begin{pmatrix}\psi^k_{1,1}\\ \\ \psi^k_{1,2m}\end{pmatrix},$$

и потребуем выполнения условий неограниченной разрешимости задачи

$$\det\Omega_k\neq 0, \ \ k=1,....,n, \ \ j=1,2. Rep\geq\sigma_0>0. \tag{14.4}$$

При выполнении условия (14.4) спектр задачи (14.1)-(14.3) дискретен, все собственные числа λ_i действительные, положительные, m раз вырожденные, причем λ_i - корень каждого из уравнений: $\det \Omega_k(\lambda_i) = 0, \ \ k = 1, ..., n$. Каждому собственному значению λ_i задачи Штурма- Лиувилля соответствует ровно m линейно независимых собственных функций.

14.2 Итерированное уравнение Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$.

Условия неограниченной разрешимости задачи позволяют корректно определить вектор- функции влияния $H^*_{j,s}$ по формулам:

при $k < s$

$$\begin{array}{l} H^*_{k,s} = \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \ \left(\begin{array}{cc} \mathrm{E} & 0 \end{array} \right) \ \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right), \\ l_{k-1} < x < l_k, \ \ l_{s-1} < \xi < l_s, \end{array}$$

при $k > s$

$$\begin{array}{l} H^*_{k,s} = -\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathrm{E} \end{array} \right) \ \Omega_s^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \ , \\ l_{k-1} < x < l_k, \ \ l_{s-1} < \xi < l_s, \end{array}$$

при $k = s$

$$H^*_{k,s} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \ \left(\begin{array}{cc} \mathrm{E} & 0 \end{array} \right) \ \Omega_k^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \ , \\ l_{k-1} < x < \xi < l_k, \\ -\psi_k\left(x, \sqrt{p}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathrm{E} \end{array} \right) \ \Omega_k^{-1}\left(\xi, \sqrt{p}\right) \ , \\ l_{k-1} < \xi < x < l_k. \end{array} \right.$$

С помощью функций влияния можно найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - p\right)^m z_k = 0, k = 1, ..., n+1, \tag{14.5}$$

по краевым условиям

$$\begin{gathered} \Gamma_{0s}\left[z_1\right]\big|_{x=l_0} = g_{0s}, \quad \ s = 1, ..., m, \\ \Gamma_{n+1,s}\left[z_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}} = g_{n+1,e}, \ \ s = 1, ..., m \end{gathered} \tag{14.6}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[z_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[z_{k+1}\right]=g_{jk},\qquad x=l_k,\quad k=1,...,n,\;\; j=1,...,2m. \qquad (14.7)$$

Формула для решения задачи (14.5)-(14.7) имеет вид:

$$z_j\left(x\right)=\;H_{j,1}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_0\right)\;\;g_0+H_{j,n}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_{n+1}\right)\;\;g_{n+1}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}H\,_{j,s}^{*}\left(\sqrt{p},x,l_s\right)\;\;g_s \qquad (14.8)$$

где

$$g_0=\begin{pmatrix} g_{01}\\ \vdots\\ g_{0m}\end{pmatrix},\; g_{n+1}=\begin{pmatrix} g_{n+1,1}\\ \vdots\\ g_{n+1,m}\end{pmatrix},\; g_s=\begin{pmatrix} g_{k1}\\ \vdots\\ g_{k,2m}\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I_n\times(-\infty,\infty)$, решения сепаратной системы итерированных уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m u_k=0,\;\; k=1,...,n+1 \qquad (14.9)$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l}\Gamma_0\left[u_{1s}\right]\big|_{x=l_0}=f_{0s}\left(y\right), \qquad \Gamma_{n+1}\left[u_{n+1,s}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=f_{n+1,s}\left(y\right)\;, \\ s=1,...,m, y\in R^q,\end{array} \qquad (14.10)$$

и условиям неоднородного контакта на линиях сопряжения $x=l_k$:

$$\Gamma_{j1}^{k}\left[u_k\right]-\Gamma_{j2}^{k}\left[u_{k+1}\right]=f_{jk}\left(y\right)\;,\qquad x=l_k,\quad k=1,...,n,\;\; j=1,...,2m. \qquad (14.11)$$

В образах Фурье по переменной y задача (14.9)-(14.11) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2\frac{d^2}{dx^2}-\sigma^2\right)^m\tilde{u}_k=0\;,\quad k=1,...,n+1 \qquad (14.12)$$

по краевым условиям

$$\begin{array}{l}\Gamma_0\left[\tilde{u}_{1\mathrm{s}}\right]\big|_{x=l_0}=\tilde{f}_{0s}\left(\sigma\right)\ ,\qquad \Gamma_{n+1}\left[\tilde{u}_{n+1,s}\right]\big|_{x=l_{n+1}}=\tilde{f}_{n+1,s}\left(\sigma\right)\ ,\\ s=1,...,m\ ;y\in R^m,\end{array}\tag{14.13}$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\begin{array}{l}\Gamma_{j1}^k\left[\tilde{u}_k\right]-\Gamma_{j2}^k\left[\tilde{u}_{k+1}\right]=\tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right)\quad ,\\ x=l_k,\quad k=1,...,n,\ \ j=1,...,2m\end{array}.\tag{14.14}$$

Из формулы (14.8) следует, что решение задачи (14.12)-(14.14) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right)=H_{j,1}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{E}\end{pmatrix}\tilde{f}_0\left(\sigma\right)+H_{j,n}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_{n+1}\right)\ \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{E}\end{pmatrix}\tilde{f}_{n+1}\left(\sigma\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}H_{\ j,s}^{\ *}\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)\ \tilde{f}_s\left(\sigma\right),$$

где

$$\tilde{f}_0=\begin{pmatrix}\tilde{f}_{01}\\ \vdots\\ \tilde{f}_{0m}\end{pmatrix},\ \tilde{f}_{n+1}=\begin{pmatrix}\tilde{f}_{n+1,1}\\ \vdots\\ \tilde{f}_{n+1,m}\end{pmatrix},\ \tilde{f}_s=\begin{pmatrix}\tilde{f}_{s,1}\\ \vdots\\ \tilde{f}_{s,2m}\end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (14.9)-(14.11):

$$\begin{array}{l}u_j\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_{j,1}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_0\right)\ \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}f_0\left(\eta\right)+\right.\\ \qquad +H_{j,n}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_{n+1}\right)\ \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}f_{n+1}\left(\eta\right)\\ \qquad \left.+\sum\limits_{s=1}^{n}H_{\ j,n}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)\ f_s\left(\eta\right)\right)d\eta\end{array}$$

где

$$f_0=\begin{pmatrix}f_{01}\\ \vdots\\ f_{0m}\end{pmatrix},\ f_{n+1}=\begin{pmatrix}f_{n+1,1}\\ \vdots\\ f_{n+1,m}\end{pmatrix},\ f_s=\begin{pmatrix}f_{s,1}\\ \vdots\\ f_{s,2m}\end{pmatrix},$$

$H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H_{\ j,s}^{\ *}$, т.е.

$$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma\left|\eta-y\right|}H_{j,s}^*\left(\left|\sigma\right|,x,l_s\right)d\sigma.$$

Вычисляя интеграл в правой части методом вычетов, получаем формулу

$$H_{\ j,s}\left(x,\left|\eta-y\right|,l_s\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc} \text{E} & 0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}e^{-\lambda_i|\eta-y|},$$

здесь Ω_s^* - матрица, присоединенная к матрице Ω_k, $\omega_s\left(\lambda\right)\equiv\det\Omega_s\left(\lambda\right).$ При этом формула для решения основной задачи (14.9)-(14.11) преобразовывается к виду:

$$u_j\left(x,y\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{i,j0}\left(x\right)\left(\begin{array}{c}0\\ \text{E}\end{array}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_i|\eta-y|}f_0\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{i,j,n+1}\left(x\right)\left(\begin{array}{c}0\\ \text{E}\end{array}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_i|\eta-y|}f_{n+1}\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}v_{i,js}\left(x\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_i|\eta-y|}f_s\left(\eta\right)d\eta,$$

где

$$\varphi_{i,j0}\left(x\right)=\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc} \text{E} & 0\end{array}\right)\frac{\Omega_1^*\left(l_0,\lambda_i\right)}{\omega_1^{/}\left(\lambda_i\right)},$$

$$\varphi_{i,j,n+1}\left(x\right)=\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc} \text{E} & 0\end{array}\right)\frac{\Omega_n^*\left(l_{n+1},\lambda_i\right)}{\omega_n^{/}\left(\lambda_i\right)},$$

$$\varphi_{i,js}\left(x\right)=\varphi_j\left(x,\lambda_i\right)\left(\begin{array}{cc} \text{E} & 0\end{array}\right)\frac{\Omega_s^*\left(l_s,\lambda_i\right)}{\omega_s^{/}\left(\lambda_i\right)}.$$

14.3 Краевые задачи и операторы преобразования в $I_n\times(-\infty,\infty)$.

Если функции $f_{0e},f_{n+1},f_{js}\in H_2^{\beta-1/2}\left(R^q\right)$, $\beta\geq 1$, то у каждой из следующих задач Дирихле для правой полупространства R_+^{q+1}

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_0=0, & l_0<x\ ,\ y\in R^q,\\ \hat{u}_{0,\text{s}}\big|_{x=l_0}=f_{0,s}\left(y\right)\ , & y\in R^q;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}_{n+1}=0, & l_{n+1}<x\ ,\ y\in R^q,\\ \hat{u}_{n+1,s}\big|_{x=l_{n+1}}=f_{n+1,s}\left(y\right), & y\in R^q;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{js} = 0, \quad l_s < x, \ y \in R^q, \\ \hat{u}_{js}\big|_{x=l_s} = f_{js}(y) \ , \quad y \in R^q, s = 1, ..., n; j = 1, ..., 2m; \end{cases}$$

существует единственное решение $\hat{u}_{0e}, \hat{u}_{n+1e}, \hat{u}_{js} \in H_2^{\beta}\left(R_+^2\right)$, которое находится по формуле Пуассона. Формулу для решения основной краевой задачи (14.9)-(14.11) можно преобразовать к виду:

$$u_j(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i,j0}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_0(\xi, y)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i,j,n+1'}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \left(\int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_{n+1}(\xi, y)\, d\xi \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_{i,js}(x) \int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_s(\xi, y)\, d\xi, \tag{14.15}$$

где

$$\hat{u}_0 = \begin{pmatrix} \hat{u}_{01} \\ \vdots \\ \hat{u}_{0m} \end{pmatrix}, \ \hat{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{n+1,1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{n+1,m} \end{pmatrix}, .$$

Тем самым, определены операторы преобразования

$$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0, \ u_0(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x - l_{k-1}) \ \theta(l_k - x) \ \ u_{0,\,k}(x,\lambda) \ :$$

$$u_{0k}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i,k0}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_0(\xi, y)\, d\xi,$$

далее

$$P_{n+1} : \hat{u}_{n+1} \to u_{n+1}, u_{n+1}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x - l_{k-1}) \ \theta(l_k - x) \ \ u_{n+1,\,k}(x,\lambda) \ ,$$

$$u_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i,k,n+1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} \int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_{n+1}(\xi, y)\, d\xi,$$

и, наконец, операторы

$$P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js}, \ u_{js}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} \theta(x - l_{k-1}) \ \theta(l_k - x) \ u_{js,k}(x,\lambda) :$$

$$u_{js,k} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\infty} \varphi_{i,js}(x) \int_0^{\infty} sin\lambda\xi \ \hat{u}_s(\xi, y) \ d\xi.$$

Правильное описание гладкости функций u_0, u_{n+1}, u_{js} по информации о гладкости функций $\hat{u}_0, \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{js}$ приведем в частном случае:

$$\Gamma_0 = \sum\nolimits_{s=1}^{m} \alpha_{0,s} \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}, \quad \Gamma_{n+1} = \sum\nolimits_{s=1}^{m} \alpha_{n+1,s} \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}, \qquad .$$
$$\Gamma_{ij} = \sum\nolimits_{s=1}^{m} \alpha_{ij,s} \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}.$$

Теорема 14.2. Операторы $P_0 : \hat{u}_0 \to u_0$, $P_{n+1} : \hat{u}_{n+1} \to u_{n+1}$, $P_{js} : \hat{f}_{js} \to f_{js}$ осуществляют непрерывное отображение пространств $H_2^2\left(R_+\right)$ и $H_2^2\left(I_n\right)$.

Доказательство. Рассмотрим случай оператора $P_{js} : \hat{g}_{js} \to g_{js}$, где

$$g_{js}(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(x - l_{k-1}\right) \theta\left(l_k - x\right) \ g_{js\,k}(x) \ + \ \theta\left(x - l_n\right) \ g_{js,\,n+1}(x).$$

Из условия теоремы следует условие: $\left(1+\lambda^2\right) \ F_s\left[\hat{g}_{js}\right] \in L_2\left(R_+\right)$. Тогда последовательность $\left(1+\lambda_i^2\right) \ F_s\left[\hat{g}_{js}\right]\left(\lambda_i\right) \in l_2$ и, значит, функция $g_{js} \in H_2^2\left(I_n\right)$.

Следствие 14.1. Если $f_0, f_{n+1}, f_{js} \in H_2^{3/2}(R)$, , то существует единственное решение $u \in H_2^2\left(I_n \times R\right)$ основной краевой задачи (14.9)-(14.11).

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 14.2, т.к. решение рассматриваемой краевой задачи можно выразить с помощью операторов преобразования, по формуле:

$$u = P_0\left[\hat{u}_0\right] + P_{n+1}\left[\hat{u}_{n+1}\right] + \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right].$$

14.4 Разложение операторов преобразования в ряд отражений и сдвигов.

Как уже отмечалось ранее, представление операторов преобразования в форме ряда малоэффективны на практике. Получим более удобных представления, допускающие простую физическую интерпретацию. Для этого преобразуем функции влияния $H_{k,s}^*\left(\sqrt{p}, x, \xi\right)$:

$$H_{k,s}^* = \left(\omega_{ks,1} e^{-q_k x} + \omega_{ks,2} e^{-q_k (2l_k - x)}\right).$$

$$\sum_{t_1,\ldots,t_{n+1}=0}^{\infty} \alpha_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n+1}^{t_{n+1}} e^{-\sqrt{p}(l_1 - l_0)\, t_1} \cdot \ldots \cdot e^{-\sqrt{p}(l_{n+1} - l_n)\, t_{n+1}},$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ - матрицы размера $m \times m$, $\omega_{ks,1}, \omega_{ks,2}$ - матрицы размера $m \times 2m$, элементы которых- некоторые фиксированные многочлены. Условия неограниченной разрешимости (14.4) принимают вид:

$$\det \alpha_1 \neq 0, ..., \det \alpha_{n+1} \neq 0, \quad Rep \geq \sigma_0 > 0,$$

$$\left(\mathrm{E} - \alpha_q\right)^{-1} \left(\mathrm{E} + \alpha_q\right), q = 1, ..., n+1-$$

положительно-определенные матрицы при $\quad Rep \geq \sigma_0 > 0.$

Пусть операторы $p^t_{ks,j} \quad , j = 1, 2; t = (t_1, ..., t_{n+1})$ определяются из условий:

$$p^t_{ks,j}\left[e^{q_k x}\right] = \alpha_1^{t_1} \cdot ...\alpha_{n+1}^{t_{n+1}}\ \omega_{ks,j}\ \eta_s\ e^{q_k x} \quad , j = 1, 2; t = \left(t_1, ..., t_{n+1}\right),$$

где η_s - единичный вектор размера $2m$, у которого координата с номером s равна единице, а все остальные нули; тогда оператор преобразования P_{ks} можно представить в виде:

$$\begin{array}{l} P_{ks}\left[\hat{u}_{ks}\right] = \sum_{t=0}^{\infty} p^t_{ks,1}\left[\hat{u}\left(x + \delta\ t\right)\right] + p^t_{ks,2}\left[\hat{u}\left(2l_k - x + \delta\ t\right)\right]\ , \\ \delta\ t = \delta_1 t_1 + ... + \delta_{n+1} t_{n+1}. \end{array}$$

14.5 Итерированное уравнение Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I_n \times R^q$, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y\right)^m u_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1, \tag{14.16}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}$$

по граничным условиям

$$\Gamma_0\left[u_{1,\mathrm{s}}\right]\big|_{x=l_0} = f_{0,s}\left(y\right)\ , \quad \Gamma_{n+1}\left[u_{n+1}\right]\ \big|_{x=l_{n+1}} = f_{n+1}\left(y\right), \tag{14.17}$$

$s = 1, ..., m; y \in R^q$

и условиям неоднородного контакта на гиперплоскостях сопряжения $x = l_k$:

$$\Gamma^k_{j1}\left[u_k\right] - \Gamma^k_{j2}\left[u_{k+1}\right] = f_{jk}\left(y\right)\ ,\quad x = l_k,\ \ k = 1, ..., n,\ \ j = 1, ..., 2m. \quad (14.18)$$

В образах Фурье с неразделенными переменными по переменным y задача (14.16)-(14.18) принимает вид: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(a_k^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma^2\right)^m \tilde{u}_k = 0, \quad k = 1, ..., n+1 \qquad (14.19)$$

по граничным условиям

$$\Gamma_{0s}\left[\tilde{u}_1\right]\big|_{x=l_0} = \tilde{f}_{0s}\left(\sigma\right)\ , \qquad \Gamma_{n+1,s}\left[\tilde{u}_{n+1}\right]\big|_{x=l_{n+1}} = \tilde{f}_{n+1,s}\left(\sigma\right), \qquad (14.20)$$

$s = 1, ..., m$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma^k_{j1}\left[\tilde{u}_k\right] - \Gamma^k_{j2}\left[\tilde{u}_{k+1}\right] = \tilde{f}_{jk}\left(\sigma\right) \quad , x = l_k, \qquad (14.21)$$

$k = 1, ..., n,\ \ j = 1, ..., 2m.$

Решение задачи (14.19)-(14.21) имеет вид:

$$\tilde{u}_j\left(x,\sigma\right) = H^*_{j,1}\left(|\sigma|, x, l_0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}\tilde{f}_0\left(\sigma\right) + H^*_{j,n}\left(|\sigma|, x, l_{n+1}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}\tilde{f}_{n+1}\left(\sigma\right) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n} H^{\ *}_{j,s}\left(|\sigma|, x, l_s\right)\ \ \hat{f}_s,$$

где

$$\tilde{f}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{01} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0m} \end{pmatrix}, \tilde{f}_{n+1} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{n+1,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n+1,m} \end{pmatrix}, \tilde{f}_s = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{s,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{s,2m} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (14.16)-(14.18):

$$u_j(x,y) = \int_{R^q} \left(H_{j,1}(x, |\eta - y|, l_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_0(\eta) + \right.$$
$$+ H_{j,n}(x, |\eta - y|, l_{n+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_{n+1}(\eta) +$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{n} H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s)\ f_s(\eta) \right) d\eta,$$

где $H_{\ j,s}$ - обратное преобразование Фурье функции влияния $H^{\ *}_{j,s}$, т.е.

$$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^q} \int_0^\infty \sigma^{\frac{q}{2}} \frac{J_{\frac{q-2}{2}}(\sigma |y - \eta|)}{|y - \eta|^{\frac{q-2}{2}}} H^*_{j,s}(|\sigma|, x, l_s)\, d\sigma.$$

Вычисляя интеграл в правой части при помощи теории вычетов, получим:

$$H_{\ j,s}(x, |\eta - y|, l_s) = \omega_q \sum_{p=1}^{\infty} v_{j,s}(x, \lambda_p)\, Re \left[(i\lambda_p)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{H}^1_{\frac{m-2}{2}}(i\lambda_p |y - \eta|)}{|y - \eta|^{\frac{m-2}{2}}} \right],$$

$v_{j,s}(x, \lambda_p) = \varphi_j(x, \lambda_p) \begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \end{pmatrix} \frac{\Omega^*_s(l_s, \lambda_p)}{\omega^{/}_s(\lambda_p)}$, $\omega_q = \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \pi^{-\frac{q+1}{2}}$.

Таким образом, формула для решения основной задачи (14.16)-(14.18) принимает вид:

$u_j(x,y) =$

$$\omega_q \sum_{p=1}^{\infty} v_{j,0}(x, \lambda_p)\ \int_{R^q} Re \left[(i\lambda_p)^{\frac{q}{2}} \frac{H^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda_p |y - \eta|)}{|y - \eta|^{\frac{q-2}{2}}} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_0(\eta)\, d\eta +$$
$$+ \omega_q \sum_{p=1}^{\infty} v_{j,n+1}(x, \lambda_p)\ \int_{R^q} Re \left[(i\lambda_p)^{\frac{q}{2}} \frac{H^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda_p |y - \eta|)}{|y - \eta|^{\frac{q-2}{2}}} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix} f_{n+1}(\eta)\, d\eta +$$
$$\left. + \omega_q \sum_{s=1}^{n} \sum_{p=1}^{\infty} v_{j,s}(x, \lambda_p)\ \int_{R^q} Re \left[(i\lambda_p)^{\frac{q}{2}} \frac{\mathrm{H}^1_{\frac{q-2}{2}}(i\lambda_p |y - \eta|)}{|y - \eta|^{\frac{q-2}{2}}} \right]\ f(\eta) \right) d\eta.$$

14.6 Краевые задачи и операторы преобразования для итерированного уравнения Лапласа в $I_n \times (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим следующие задачи Дирихле для полупространства:

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_0 = 0, \quad l_0 < x, y \in R^q, \\ \hat{u}_0|_{x=l_0} = f_0(y), \quad y \in R^q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{n+1} = 0, \quad l_{n+1} < x, y \in R^q, \\ \hat{u}_{n+1}|_{x=l_{n+1}} = f_{n+1}(y), \quad y \in R^q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{js} = 0, \quad l_s < x,\ y \in R^q, \\ \hat{u}_{js}|_{x=l_s} = f_{js}(y), \quad y \in R^q; s = 1, ..., n; j = 1, ..., 2m. \end{cases}$$

Основную краевую задачу (14.16)-(14.18) решают операторы преобразования P_0, P_{n+1}, P_{js}. Для структуры неизвестного решения имеем формулу:

$$u = P_0[\hat{u}_0] + P_{n+1}[\hat{u}_{n+1}] + \sum_{j=1}^{2m} \sum_{s=1}^{n} P_{js}[\hat{u}_{js}].$$

Глава 15

Неоднородные краевые задачи для функций, кусочно-гармонических шаре

15.1 Постановка краевых задач

Пусть B_n - единичный, кусочно-однородный шар из R^N :

$B_n = \mathop{V}\limits_{i=1}^{n+1} V_i; V_i = \left\{ x \in R^N : r_i < \|x\| < r_{i-1} \right\} ; i = 1, ..., n+1.$

Шар B_n допускает параметризацию $B_n = \mathrm{S}_0 \times I_n^+$:

$$I_n^+ = \bigcup_{i=1}^{n+1} (r_i, r_{i-1}) \, ; r_0 = 1, r_{n+1} = 0, r_i < r_{i-1} \, ; i = 1, ..., n+1.$$

При этом оператор Лапласа Δ запишется в виде:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\eta u$$

здесь Δ_η - оператор Лапласа на сфере S_0.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве B_n, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\Delta u = 0 \tag{15.1}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0 [u_1] = f_0 (\eta), \quad \eta \in S_0 \tag{15.2}$$

и условиям неоднородного контакта на гиперповерхностях сопряжения S_k :

$$\Gamma_{j1}^k [u_k] - \Gamma_{j2}^k [u_{k+1}] = f_{jk} (\eta) \ ; \eta \in S_k \ ; k = 1, ..., n, \ j = 1, 2 \ , \tag{15.3}$$

$S_0 = \left\{ \ \eta = (\eta_1, ..., \eta_N) : \|\eta\|^2 = 1 \ \right\}, S_k = \left\{ \ \eta = (\eta_1, ..., \eta_N) : \|\eta\|^2 = r_k^2 \ \right\}.$
Здесь $\Gamma_0, \Gamma_{j1}^k, \Gamma_{j2}^k \, (j = 1, 2; \ \ k = 1, ..., n)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\sum_{i=1}^N x_i \frac{d}{dx_i}$.

Пусть числовые последовательности $\alpha_{0,l}, \alpha_{j1,l}^k, \alpha_{j2,l}^k$ определены условиями:

$$\Gamma_0 \left[\mathrm{r^l} \right] = \alpha_{0,l} r^l, \Gamma_{ij}^k \left[r^l \right] = \alpha_{ij,l}^k r^l; i, j = 1, 2; k = 1, ..., n; l \in Z,$$

и пусть выполнены условия

$$\det M_{kj,l} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j,l}^k & \alpha_{1j,-l}^k \\ \alpha_{2j,l}^k & \alpha_{2j,-l}^k \end{pmatrix} \neq 0, k = 1, ..., n; j = 1, 2; l \in Z. \tag{15.4}$$

Обозначим

$$\varphi_{n+1,l} (l) = r^l; \psi_{n+1,l} = r^{-(l+N-2)}; l \in Z.$$

При фиксированном значении l рекуррентными соотношениями

$$\Gamma \ _{j1}^{k} (\varphi_{k,l}, \psi_{k,l}) = \Gamma \ _{j2}^{k} (\varphi_{k+1,l}, \psi_{k+1,l}), k = 1, ..., n; j = 1, 2. \tag{15.5}$$

с учетом условий (15.4) можно корректно определить остальные n пар функций $(\varphi_{k,l}, \psi_{k,l})$, $k = 1, ..., \mathrm{n}$. Введем также обозначения

$$\overset{0}{\underset{1,l}{\varphi}} = \Gamma_0 [\varphi_{1,l} (r)] \Bigg|_{r=r_0}, \overset{0}{\underset{1,l}{\psi}} = \Gamma_0 [\psi_{1,l} (r)] \Bigg|_{r=r_0}, i = 1, ..., n+1; l \in Z,$$

$$\Gamma_{ij}^k [\varphi_{k,l} (r)] = \varphi_{ij,l}^k (r) \ ; i, j = 1, 2 \ ; k = 1, ..., n \ ; l \in Z,$$

$$\Gamma_{ij}^{k}\left[\psi_{k,l}\left(r\right)\right]=\psi_{ij,l}^{k}\left(r\right),i,j=1,2;k=1,...,n,l\in Z,$$

Заметим, что определители $\det\Omega_{k,l}\left(\rho\right)\ ;k=1,...,n\ ;l\in Z$ не зависят от ρ. В дальнейшем считаем, что выполнены условия неограниченной разрешимости задачи:

1) числовые последовательности $\alpha_{0,l},\alpha_{j1,l}^{k},\alpha_{j2,l}^{k}$ при $l\to\infty$ имеют рост не выше степенного,

2) для каждого $l\in Z$ выполнены условия:

$$\det\Omega_{k,l}\left(\rho\right)\neq 0\ ;k=1,...,n,\overset{0}{\psi}_{1,l}\neq 0 \tag{15.6}$$

Определим функции влияния $H_{j,s}^{*}$:

при $k<s\ \ H^{*}{}_{k,s,l}=$

$$\varphi_{k,l}\left(r\right)\left(1\quad 0\right)\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\psi_{k,l}\left(r\right)\overset{0}{\psi}{}_{1,l}^{-1}\cdot\overset{0}{\varphi}_{1,l}\cdot\left(1\quad 0\right)\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$
$$r_{k-1}<r<\rho<r_{k},$$

при k >s $H_{k,s,l}^{*}=$

$$\psi_{k,l}\left(r\right)\left\{-\overset{0}{\psi}{}_{1,l}^{-1}\cdot\underset{1,l}{\overset{0}{\varphi}}\cdot\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\ \Omega_{s,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\ \Omega_{s,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},$$
$$r_{k-1}<\rho<r<r_{s},$$

при $k=s$

$H_{k,s,l}^{*}=$

$$\begin{cases}\varphi_{k,l}\left(r\right)\left(1\quad 0\right)\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\psi_{k,l}\left(r\right)\overset{0}{\psi}{}_{1,l}^{-1}\cdot\overset{0}{\varphi}_{1,l}\cdot\left(1\quad 0\right)\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\ r_{k-1}<r<\rho<r_{k},\\ \psi_{k,l}\left(r\right)\cdot\left\{-\overset{0}{\psi}{}_{1,l}^{-1}\cdot\underset{1,l}{\overset{0}{\varphi}}\cdot\left(1\quad 0\right)\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\ \Omega_{k,l}^{-1}\left(\rho\right)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\\ r_{k-1}<\rho<r<r_{k}\ .\end{cases}$$

Функции $H_{k,s,l}^{*}\left(r,\rho\right)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве I_{n}^{+} решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{d}{dr}(r^{N-1}\frac{d\hat{u}_{k,l}}{dr}) - l\,(l+N-2)\,\frac{1}{r^2}\hat{u}_{k,l} = 0; l \in Z \qquad (15.7)$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[\hat{u}_{1,l}\right]\big|_{r=r_0} = \hat{g}_{0,l}, \qquad (15.8)$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma^k_{j1,l}\left[\hat{u}_{k,l}\right] - \Gamma^k_{j2,l}\left[\hat{u}_{k+1,l}\right] = \hat{g}_{jk,l}, r = r_k, k = 1,...,n; j = 1,2. \qquad (15.9)$$

С помощью функций влияния решение задачи (15.7)-(15.9) можно представить в виде:

$$\hat{u}_j\,(r) = H^*_{j,1,l}\,(r,r_0)\,\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\hat{g}_0 + \sum_{s=1}^{n} H^*_{j,s}\,(r,r_s)\,\begin{pmatrix} \hat{g}_{1s} \\ \hat{g}_{2s} \end{pmatrix}. \qquad (15.10)$$

Преобразование Фурье на сфере S_0 с неразделенными переменными приводит задачу (15.1)-(15.3) к виду: найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{d}{dr}(r^{N-1}\frac{d\tilde{u}_{k,l}}{dr}) - l\,(l+N-2)\,\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{k,l} = 0\ ; l \in Z \qquad (15.11)$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[\tilde{u}_{1,l}\right] = r_0^{N-1}\tilde{f}_{0,l}, \qquad (15.12)$$

и условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma^k_{j1,l}\left[\tilde{u}_{k,l}\right] - \Gamma^k_{j2,l}\left[\tilde{u}_{k+1,l}\right] = r_k^{N-1}\tilde{f}_{jk,l}, r = r_k, k = 1,...,n\ ; j = 1,2. \qquad (15.13)$$

Из формулы (15.11) следует, что решение задачи (15.12)-(15.14) имеет вид:

$$\tilde{u}_{j,l}\,(r) = H^*_{j,1,l}\,(r,r_0)\,\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r_0^{N-1}\tilde{f}_{0,l} + \sum_{s=1}^{n} H^{\ *}_{j,s+1,l}\,(r,r_s)\ r_s^{N-1}\begin{pmatrix} \tilde{f}_{1s,l} \\ \tilde{f}_{2s,l} \end{pmatrix}, \qquad (15.14)$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (15.1)-(15.3) в виде:

$$u_j(r,\eta) = \frac{1}{\omega_N}\int_{S_0}\Bigg(H_{j,1}(r,r_0,\langle\eta,\xi\rangle)\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} r_0^{N-1} f_0(\eta) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n} H_{\ j,s}(r,r_s,\langle\eta,\xi\rangle)\ r_0^{N-1}\begin{pmatrix}f_{1s}(\eta)\\ f_{2s}(\eta)\end{pmatrix}\Bigg) dS_0, \qquad (15.15)$$

где

- ω_N - (N-1) мерный объем единичной сферы S_0 из R^N ; $C_l^{N/2-1}$ - полиномы Гегенбауэра [19].

Пусть B_0 - единичный однородный шар из : $B_0 = \left\{\ x \in R^N : \|x\|^2 < 1\right\}$.

15.2 Краевые задачи и соответствующие операторы преобразования

Рассмотрим модельные задачи Дирихле в единичном шаре B_0 :

$$\begin{cases}\ \Delta\hat{u}_0 = 0,\ \ x \in B_0,\\ \hat{u}_0 = f_0(\eta),\ \ \eta \in S_0;\end{cases},$$

$$\begin{cases}\ \Delta\hat{u}_{jq} = 0,\ \ x \in B_0,\\ \hat{u}_{jq} = f_{jq}(\eta)\ ,\ \ \eta \in S_q.\end{cases}$$

Если функции $f_0(\eta), f_{jq}(\eta)$ непрерывны на соответствующей сфере, то решение каждой из указанных задач существует, единственно и находится по формуле Пуассона для шара. Основную формулу (15.16) можно преобразовать к виду:

$$u = P_0[\hat{u}_0] + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=1}^{n} P_{js}[\hat{u}_{js}],$$

в котором P_0, P_{jq} - операторы преобразования, действующие по правилам:

$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0$,

$$u_{0j}(r,\eta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1} H^*_{j,1,l}(r,r_0)\ r_0^{N-1} r^{-l}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$\int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)\ \hat{u}_0\left(r,\eta\right)dS_0,$$

$\chi\left(V_k\right)$ - характеристическая функция области V_k ;

$P_{jq}:\hat{u}_{jq}\to u_{jq}, j=1,2,\ u_{jq}\left(r,\eta\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\chi\left(V_k\right)\ \ u_{js,\,q}\left(r,\eta\right)$,

$$u_{1q,j}\left(r,\eta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}H^*_{j,q,l}\left(r,r_q\right)\ r_q^{N-1}r^{-l}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)\ \hat{u}_{1q}\left(r,\eta\right)dS_0,$$

$$u_{2q,j}\left(r,\eta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}H^*_{j,q,l}\left(r,r_q\right)\ r_q^{N-1}r^{-l}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)\ \hat{u}_{2q}\left(r,\eta\right)dS_0.$$

Из условий неограниченной разрешимости задачи следует

Теорема 15.1 *.Оператор преобразования P_0 (P_{jq}) сопоставляет функции $\hat{u}_0$ $(\hat{u}_{jq})$ гармонической в однородном шаре B_0 (r_qB_0) функцию u_0 (u_{jq}) кусочно- гармоническую в кусочно- однородном шаре B_n, компоненты которой - функции $u_{0,k}$ $(u_{jq,k})$ непрерывные в шаровом слое V_k.*

Глава 16

Неоднородные краевые задачи для функций, кусочно-гармонических в сферически-однородном пространстве

16.1 Краевые задачи с сопряжениями на сферах

Пусть B_n - сферически кусочно- однородное пространство:

$$B_n = \bigvee_{i=0}^{n+1} V_i; V_i = \left\{ x \in R^N : r_i < \|x\| < r_{i-1} \right\} \;, r_{-1} = \infty, r_{n+1} = 0$$

с естественной параметризацией- $B_n = S_0 \times I_n$; $\quad S_0 = \left\{ \eta : \|\eta\|^2 = 1 \right\}$ - единичная сфера из R^N. Пусть Δ - оператор Лапласа, записанный в сферической системе координат, т.е.

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r}(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \Delta_\eta u,$$

Δ_η - оператор Лапласа на сфере S_0. Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве B_n, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\Delta u_k = 0,\ \ x \in V_k; k = 0, 1, ..., n \tag{16.1}$$

по условиям неоднородного контакта на гиперповерхностях сопряжения S_k :

$$\Gamma_{j1}^k \left[u_k\right] - \Gamma_{j2}^k \left[u_{k+1}\right] = \mathrm{g}_{jk}\left(\eta\right) \quad ; \eta \in S_k; k = 1, ..., n,\ \ j = 1, 2, \tag{16.2}$$

здесь $\Gamma_{j1}^k, \Gamma_{j2}^k \left(j = 1, 2;\ \ k = 1, ..., n\right)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $\sum_{i=1}^N x_i \frac{d}{dx_i}$.

Изучим вспомогательную задачу о конструкции ограниченного на множестве I_n решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{\mathrm{d}}{dr} (r^{N-1} \frac{d\hat{u}_{k,l}}{dr}) - l\left(l + N - 2\right) \frac{1}{r^2} \hat{u}_{k,l} = 0; l \in Z, \tag{16.3}$$

по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1,l}^k \left[\hat{u}_{k,l}\right] - \Gamma_{j2,l}^k \left[\hat{u}_{k+1,l}\right] = \hat{g}_{jk,l}, r = r_k, k = 0, 1, ..., n; j = 1, 2. \tag{16.4}$$

Введем ряд обозначений и сформулируем ряд условий, гарантирующих однозначную разрешимость задачи (16.3)-(16.4). Определим последовательности $\alpha_{1j,l}^k, \alpha_{2j,l}^k; l \in Z$ равенствами:

$$\Gamma_{ij}^k \left[r^l\right] = \alpha_{ij,l}^k \cdot r^l, i, j = 1, 2; k = 0, 1, ..., n,$$

и потребуем выполнения условий:

$$\det M_{kj} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{1j,l}^k & \alpha_{1j,-l}^k \\ \alpha_{2j,l}^k & \alpha_{2j,-l}^k \end{pmatrix} \neq 0,\ \ k = 0, ..., n,\ \ j = 1, 2. \tag{16.5}$$

Обозначим
$\varphi_{0,l}\left(r\right) = r^l;\ \ \psi_{n+1,l}\left(r\right) = r^{-(l+N-2)}; l \in Z.$
Рекуррентным соотношениями

$$\Gamma_{j2}^k \left[\varphi_{k+1}\right] = \Gamma_{j1}^k \left[\varphi_k\right]\ , \Gamma_{j1}^k \left[\psi_k\right] = \Gamma_{j2}^k \left[\psi_{k+1}\right], \tag{16.6}$$

$k = 0, ..., n, \quad j = 1, 2,$

имея в виду условия (16.5), можно определить n пар функций (φ_k, ψ_k) , . Введем также обозначения

$$\Gamma_{ij}^k \left[\varphi_{k,l}(r)\right] = \varphi_{ij,l}^k(r); i, j = 1, 2; k = 1, ..., n; l \in Z,$$

$$\Gamma_{ij}^k \left[\psi_{k,l}(r)\right] = \psi_{ij,l}^k(r), i, j = 1, 2; k = 1, ..., n, l \in Z,$$

Заметим, что определители $\det \Omega_{k,l}(\rho)$; $k = 1, ..., n; l \in Z$ не зависят от ρ.

В дальнейшем считаем что, выполнены условия неограниченной разрешимости задачи:

1) числовые последовательности $\alpha_{j1,l}^k, \alpha_{j2,l}^k$ при $l \to \infty$ имеют рост не выше степенного,

2) для каждого целого $l \in Z$ выполнены условия:

$$\det \Omega_{k,l}(\rho) \neq 0; k = 1, ..., n. \tag{16.7}$$

Определим функций влияния $H_{j,s}^*$ по формулам:

при $k < s$

$$H_{ks,l}^* = \varphi_{k,l}(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega_{s,l}^{-1}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r_k < r < r_{k-1}, r_s < \rho < r_{s-1},$$

при $k > s$

$$H_{ks,l}^* = -\psi_{k,l}(r) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega_{s,l}^{-1}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_k < r < r_{k-1}, \ r_s < \rho < r_{s-1},$$

при $k = s$

$$H_{ks,l}^* = \begin{cases} \varphi_{k,l}(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega_{k,l}^{-1}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r_k < r < \rho < r_{k-1}, \\ -\psi_{k,l}(r) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega_{s,l}^{-1}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r_k < \rho < r < r_{k-1}. \end{cases}$$

Функции $H_{ks,l}^*(r, \rho)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи. С их помощью решение задачи (16.3)-(16.4) находится по формуле:

$$\hat{u}_j(r) = \sum_{s=0}^{n} H^*_{j,s}(r, r_s) \begin{pmatrix} \hat{g}_{1s} \\ \hat{g}_{2s} \end{pmatrix}. \qquad (16.8)$$

Преобразование Фурье на сфере S_0 с неразделенными переменными [8] приводит задачу (16.1)-(16.2) к виду:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr}(r^{N-1} \frac{d\tilde{u}_{k,l}}{dr}) - l\,(l + N - 2)\,\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{k,l} = 0\ ; l \in Z \qquad (16.9)$$

по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma^k_{j1,l}[\tilde{u}_{k,l}] - \Gamma^k_{j2,l}[\tilde{u}_{k+1,l}] = r_k^{N-1}\tilde{f}_{jk,l}, r = r_k, k = 1, ..., n\ ; j = 1, 2. \qquad (16.10)$$

Из формулы (16.8) следует, что решение задачи (16.9)-(16.10) имеет вид:

$$\tilde{u}_{j,l}(r) = \sum_{s=0}^{n} H^{\ *}_{j,s,l}(r, r_s)\ r_s^{N-1} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1s,l} \\ \tilde{f}_{2s,l} \end{pmatrix}. \qquad (16.11)$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (16.1)-(16.2) в виде:

$$u_j(r, \eta) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_0} \sum_{s=0}^{n} H_{\ j,s}(r, r_s, \langle \eta, \xi \rangle)\ r_0^{N-1} \begin{pmatrix} f_{1s}(\eta) \\ f_{2s}(\eta) \end{pmatrix} d\eta, \qquad (16.12)$$

где

$$H_{\ j,s}(r, r_s, \langle \eta, \xi \rangle) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} C_l^{N/2-1}(\langle \eta, \xi \rangle)\, H^*_{j,s,l}(r, r_s)\ .$$

16.2 Краевые задачи и соответствующие операторы преобразования

Рассмотрим модельные задачи Дирихле в единичном шаре B_0 :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \hat{u}_{jq} = 0, \;\; x \in B_0, \\ \hat{u}_{jq} = f_{jq}\left(\eta\right)\;, \;\; \eta \in S_q. \end{array} \right. ,$$

Если функция $f_{jq}\left(\eta\right)$ непрерывна на соответствующей сфере, то решение каждой из указанных задач существует, единственно и находятся по формуле Пуассона для шара. Основную формулу (16.12) можно преобразовать к виду :

$$u = \sum_{j=\ 1}^{2} \sum_{s=\ 0}^{n} P_{js}\left[\hat{u}_{js}\right],$$

где $P_{js}, j = 1, 2$ - операторы преобразования:
$P_{js} : \hat{u}_{js} \rightarrow u_{js}, j = 1, 2,$

$$u_{1s,j}\left(r,\eta\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} H^{*}_{j,s,l}\left(r, r_s\right)\; r_s^{N-1} r^{-l} \left(\; 01 \;\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle \eta, \xi \rangle\right)\; \hat{u}_{1s}\left(r,\eta\right) dS_0$$

$$u_{2s,j}\left(r,\eta\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} H^{*}_{j,s,l}\left(r, r_s\right)\; r_s^{N-1} r^{-l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle \eta, \xi \rangle\right)\; \tilde{u}_{2s}\left(r,\eta\right) dS_0.$$

Из условий (16.7)неограниченной разрешимости следует

Теорема 16.1 *Каждый оператор преобразования P_{jq} сопоставляет функции $\hat{u}_{jq}$ гармонической в однородном шаре $r_q B_0$ функцию u_{jq} кусочно-гармоническую в кусочно- однородном шаре B_n, компоненты которой - функции $u_{jq,k}$ непрерывные в шаровом слое V_k.*

Глава 17

Неоднородные краевые задачи для функций кусочно-гармонических в сферическом слое

17.1 Краевые задачи с условиями сопряжения в сферическом слое

Пусть B_n - кусочно-однородный сферический слой:

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i; V_i = \left\{ \ x \in R^N : r_i < \|x\| < r_{i-1} \right\}, ,$$

который допускает параметризацию B_n :

$$B_n = S_0 \times I_n; \quad I_n = \left\{ r : r \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} (r_j, r_{j-1}) \ \right\},$$

S_0 - единичная сфера из R^N.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве B_n, решения сепаратной системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\Delta u_k = 0, \ \ x \in V_k; k = 1, ..., n+1 \tag{17.1}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0 \left[u_1\right]\big|_{r=r_0} = g_0,$$
$$\Gamma_{n+1} \left[u_{n+1}\right]\big|_{r=r_{n+1}} = g_{n+1} \qquad (17.2)$$

по условиям неоднородного контакта на гиперсферах сопряжения S_k :

$$\Gamma_{j1}^{k} \left[u_k\right] - \Gamma_{j2}^{k} \left[u_{k+1}\right] = f_{jk}\left(\eta\right) \quad ; \eta \in S_k; k = 1, ..., n, \ \ j = 1, 2; \qquad (17.3)$$

здесь $\Gamma_0, \Gamma_{n+1}, \Gamma_{j1}^{k}, \Gamma_{j2}^{k} \left(j = 1, 2; \ \ k = 1, ..., n\right)$ - некоторые операторы, перестановочные с оператором $r\frac{d}{dr}$.

Изучим вспомогательную задачу о конструкции ограниченного на множестве I_n нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{d\hat{u}_{k,l}}{dr} \right) - l \left(l + N - 2\right) \frac{1}{r^2} \hat{u}_{k,l} = 0; l \in Z \qquad (17.4)$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0 \left[\hat{u}_{1,l}\right]\big| _{\ r=r_0} = \hat{g}_{0,l}, \Gamma_{n+1} \left[\hat{u}_{n+1,l}\right]\big| _{\ r=r_{n+1}} = \hat{g}_{n+1,l} \qquad (17.5)$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1,l}^{k} \left[\hat{u}_{k,l}\right] - \Gamma_{j2,l}^{k} \left[\hat{u}_{k+1,l}\right] = \hat{g}_{jk,l}, r = r_k, k = 0, 1, ..., n; j = 1, 2. \qquad (17.6)$$

Сформулируем условия на граничные операторы $\Gamma_0, \Gamma_{n+1}, \Gamma_{ij}^{k}$ достаточные для однозначной разрешимости задачи (17.4)-(17.6). Определим последовательности

$\alpha_{0,l}, \alpha_{n+1,l}, \alpha_{1j,l}^{k}, \alpha_{2j,l}^{k}; l \in Z$ из равенств:

$$\Gamma_0 \left[r^l\right] = \alpha_{0,l} \cdot r^l,$$

$$\Gamma_{n+1} \left[r^l\right] = \alpha_{n+1,l} \cdot r^l,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} \left[r^l\right] = \alpha_{ij,l}^{k} \cdot r^l, i, j = 1, 2; k = 0, 1, ..., n$$

и потребуем выполнения условий:

$$\begin{aligned}&\det M_{kj} = \det \begin{pmatrix} \alpha^k_{1j,l} & \alpha^k_{1j,-l} \\ \alpha^k_{2j,l} & \alpha^k_{2j,-l} \end{pmatrix} \neq 0, \;\; k = 0, ..., n, \;\; j = 1, 2; \\ &\alpha_{0,l} \neq 0, \alpha_{n+1,l} \neq 0, l \in Z \; .\end{aligned} \tag{17.7}$$

Обозначим через $\psi_{n+1,l}(r)$ решение дифференциального уравнения (17.4), удовлетворяющее граничному условию: $\Gamma_{n+1}\left[\psi_{n+1,l}\right]\big|_{r=r_{n+1}} = 0$.

Рекуррентными соотношениями определим остальные n функций ψ_{kl} :

$$\Gamma^k_{j1}\left(\psi_{k,l}\right) = \Gamma^k_{j2}\left(\psi_{k+1,l}\right), \quad r = r_k, \; k = 1, ..., n, \quad j = 1, 2.$$

Аналогично, через $\varphi_{1,l}(r)$ обозначим решение дифференциального уравнения (17.4), удовлетворяющее граничному условию:

$$\Gamma_0\left[\varphi_{1,l}\right]\big|_{r=r_0} = 0.$$

Рекуррентным соотношениями определим остальные n функций $\varphi_{k,l}$:

$$\Gamma^k_{j2}\left(\varphi_{k+1,l}\right) = \Gamma^k_{j1}\left(\varphi_{k,l}\right) \;, \quad r = r_k, \quad k = 1, ..., n, \quad j = 1, 2. \tag{17.8}$$

Функции $\varphi_{k,l}$ и ψ_{kl} определены корректно ввиду условия (17.7).

Введем также обозначения

$$\Gamma^k_{ij}\left[\varphi_{k,l}(r)\right] = \varphi^k_{ij,l}(r), i, j = 1, 2; k = 1, ..., n,$$

$$\Gamma^k_{ij}\left[\psi_{k,l}(r)\right] = \psi^k_{ij,l}(r), i, j = 1, 2; k = 1, ..., n,$$

$$\Omega_{k,l}(\rho) = \begin{pmatrix} \varphi^k_{11,l}(\rho) & \psi^k_{11,l}(\rho) \\ \varphi^k_{12,l}(\rho) & \psi^k_{12,l}(\rho) \end{pmatrix} .$$

Заметим, что определители $\det \Omega_{k,l}(\rho)$ не зависят от ρ.

Всюду ниже считаем выполненными условия неограниченной разрешимости задачи:

1) числовые последовательности $\alpha_{0,l}, \alpha_{n+1,l}, \alpha^k_{j1,l}, \alpha^k_{j2,l}$ при $l \to \infty$ имеют рост не выше степенного;

2) для каждого целого $l \in Z$ выполнены условия:

$$\det \Omega_{k,l}(\rho) \neq 0; k = 1, ..., n. \tag{17.9}$$

Введчм функций влияния $H^*_{j,s}$ следующими формулами:
при $k < s$

$$H^*_{ks,l} = \varphi_{k,l}(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega^{-1}_{s,l}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$r_k < r < r_{k-1}, \; r_s < \rho < r_{s-1}; k, s = 1, ..., n+1,$$

при $k > s$

$$H^*_{ks,l} = -\psi_{k,l}(r) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega^{-1}_{s,l}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$r_k < r < r_{k-1}, \quad r_s < \rho < r_{s-1},$$

при $k = s$

$$H^*_{k,s} = \begin{cases} \varphi_{k,l}(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega^{-1}_{s,l}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ r_k < r < \rho < r_{k-1} \\ \varphi_{k,l}(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega^{-1}_{s,l}(\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ r_k < \rho < r < r_{k-1}. \end{cases}$$

Функции $H^*_{ks,l}(r, \rho)$ определены корректно в силу условий неограниченной разрешимости задачи. Решение задачи (17.4)-(17.6) можно найти используя функции влияния:

$$\hat{u}_{j,l}(r) = H^*_{j1,l}(r, r_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{g}_{0,l} + H^*_{jn,l}(r, r_{n+1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{g}_{n+1,l} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} H^{\ *}_{js,l}(r, r_s) \begin{pmatrix} \hat{g}_{1s,l} \\ \hat{g}_{2s.l} \end{pmatrix}. \tag{17.10}$$

В изображениях Фурье с неразделенными переменными на сфере S_0 задача (17.1)-(17.3) принимает вид:

найти решение сепаратной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr}(r^{N-1} \frac{d\tilde{u}_{k,l}}{dr}) - l(l + N - 2) \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{k,l} = 0 \; ; l \in Z \tag{17.11}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0\left[\tilde{u}_{1,l}\right]\Big|_{\ r=r_0}=r_0^{N-1}\tilde{g}_{0,l},\quad \Gamma_{n+1}\left[\tilde{u}_{n+1,l}\right]\Big|_{\ r=r_{n+1}}=r_{n+1}^{N-1}\tilde{g}_{n+1,l} \tag{17.12}$$

по условиям неоднородного контакта в точках сопряжения интервалов

$$\Gamma_{j1,l}^{k}\left[\tilde{u}_{k,l}\right]-\Gamma_{j2,l}^{k}\left[\tilde{u}_{k+1,l}\right]=r_k^{N-1}\tilde{g}_{jk,l}, r=r_k, k=1,...,n\ ; j=1,2. \tag{17.13}$$

Из формулы (17.10) следует, что решение задачи (17.11)-(17.13) имеет вид:

$$\tilde{u}_{j,l}\left(r\right)=H_{\ j1,l}^{\ *}\left(r,r_0\right)\ r_0^{N-1}\left(\ 01\ \right)\tilde{g}_{0,l}+H_{\ jn,l}^{\ *}\left(r,r_{n+1}\right)\ r_{n+1}^{N-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\tilde{g}_{n+1,l}+$$
$$+\textstyle\sum_{s=1}^{n}H_{\ js,l}^{\ *}\left(r,r_s\right)\ r_s^{N-1}\begin{pmatrix}\tilde{g}_{1s,l}\\ \tilde{g}_{2s,l}\end{pmatrix}\ .$$

Возвращаясь к оригиналам Фурье, получим формулу для решений задачи (17.1)-(17.3) в виде

$$u_j\left(r,\eta\right)=\frac{1}{\omega_N}\int_{S_0}\left(H_{j1}\left(r,r_0,\langle\eta,\xi\rangle\right)\ r_0^{N-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}g_0\left(\eta\right)+\right.$$
$$+H_{jn}\left(r,r_{n+1},\langle\eta,\xi\rangle\right)\ r_{n+1}^{N-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}g_{n+1}\left(\eta\right)+$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{n}H_{j,s}\left(r,r_s,\langle\eta,\xi\rangle\right)\ r_0^{N-1}\begin{pmatrix}g_{1s}\left(\eta\right)\\ g_{2s}\left(\eta\right)\end{pmatrix}\right)dS_0,$$

где

$$H_{\ j,s}\left(r,r_s,\langle\eta,\xi\rangle\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}C_l^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)H_{j,s,l}^{*}\left(r,r_s\right)\ .$$

17.2 Задачи сопряжения и операторы преобразования

Пусть B_0 - единичный шар из R^N, $B_0 = \left\{ x \in R^N : \|x\|^2 \leq 1 \right\}$. Рассмотрим модельные задачи Дирихле в B_0 :

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_0 = 0, \ \ x \in B_0, \\ \hat{u}_0 = g_0 (\eta), \ \ \eta \in S_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{n+1} = 0, \ \ x \in B_0, \\ \hat{u}_{n+1} = g_{n+1} (\eta) \ , \ \ \eta \in S_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_{jq} = 0, \ \ x \in B_0, \\ \hat{u}_{jq} = g_{jq} (\eta), \ \ \eta \in S_0. \end{cases}$$

Если функции $g_0 (\eta), g_{n+1} (\eta), g_{jq} (\eta)$ непрерывны на соответствующих сферах, то решение каждой из указанных задач существует, единственно и находятся по формуле Пуассона для шара. Основную формулу (17.14) можно переписать в виде:

$$u = P_0 [\hat{u}_0] + P_{n+1} [\hat{u}_{n+1}] + \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=0}^{n} P_{js} [\hat{u}_{js}],$$

где P_0, P_{n+1}, P_{jq} операторы преобразования:

$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0, \ u_0 (r, \eta) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \chi (V_k) \ \ u_{0,\,k} (r, \eta)$,

$$u_{0,j} (r, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} H^*_{1,j,l} (r, r_0) \ r_0^{N-1} r^{-l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_0} C_l^{N/2-1} (\langle \eta, \xi \rangle) \ \hat{u}_0 (r, \eta) \, dS_0;$$

$P_{n+1} : \hat{u}_{n+1} \to u_{n+1}, \ u_{n+1} (r, \eta) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \chi (V_k) \ \ u_{n+1,\,k} (r, \eta)$,

$$u_{n+1,j} (r, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} H^*_{j,n,l} (r, r_{n+1}) \ r_{n+1}^{N-1} r^{-l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_0} C_l^{N/2-1} (\langle \eta, \xi \rangle) \ \hat{u}_{n+1} (r, \eta) \, dS_0,$$

а также: ,

$$u_{1s,j}\left(r,\eta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}H_{j,s,l}^{*}\left(r,r_{s}\right)\ r_{s}^{N-1}r^{-l}\left(\ 01\ \right)\cdot$$

$$\cdot\int_{S_0}C_{l}^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)\ \hat{u}_{1s}\left(r,\eta\right)dS_{0}$$

$$u_{2s,j}\left(r,\eta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}H_{j,s,l}^{*}\left(r,r_{s}\right)\ r_{s}^{N-1}r^{-l}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\int_{S_0}C_{l}^{N/2-1}\left(\langle\eta,\xi\rangle\right)\ \tilde{u}_{2s}\left(r,\eta\right)dS_{0}.$$

Из условий (17.9)неограниченной разрешимости следует

Теорема 17.1 . *Пусть* P_0, P_{n+1}, P_{jq} *операторы преобразования* $P_0 : \hat{u}_0 \to u_0$, $P_{n+1} : \hat{u}_{n+1} \to u_{n+1}$, $P_{js} : \hat{u}_{js} \to u_{js}$. *Тогда функции* u_0, u_{n+1}, u_{jq} *кусочно- гармонические в* B_n, *причем их компоненты* $u_{0,k}, u_{n+1,k}, u_{jq,k}$ *- функции непрерывные в шаровом слое* V_k.

Часть IV

Операторный метод в задачах анализа и математической физики

Глава 18

Разложение оператора преобразования в произведение граничного оператора и оператора сглаживания

18.1 Операторы Γ_i, порождаемые граничными условиями, и их свойства.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на действительной полуоси $x \geq l_0$. Введем серию граничных операторов Γ_i :

$$\Gamma_i [f] = \theta (x - l_0) f (x) + \theta (x - l_0) \ h_i f (x + 2l_i) , , \tag{18.1}$$

$i = 1, ..., n \ ; \ 0 < h_i < 1$

где θ - единичная функция Хевисайда, $l_1, l_2, ..., \ l_n$ точки на полуоси такие, что

$l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n \ ; \ l_i - l_0 \leq l_{i+1} - l_i, i = 1, ..., n - 1.$

В дальнейшем, не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что $l_0 = 0$.

Оператор, обратный к Γ_i, действует на функцию g, ограниченную на $x \geq l_0$ по правилу:

$$\Gamma_i^{-1}[g] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k g\left(x + 2l_i \cdot k\right). \tag{18.2}$$

Оператор, сопряженный к Γ_i, имеет вид:

$$\Gamma_i^*[g] = \theta(x)\ g(x) + h\theta(x - 2l_i)\ g(x - 2l_i). \tag{18.3}$$

Произведение операторов $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ обозначим символом Γ, $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$.

Из формулы (18.1) получим выражение для обратного оператора Γ^{-1} :

Оператор, сопряженный к $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, имеет вид $\Gamma^* = \Gamma_1^* \cdot ... \cdot \Gamma_n^*$.

18.2 Операторы сглаживания L_i.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на действительной кусочно- однородной полуоси I_n^+, непрерывно-дифференцируема на I_n^+, причем в точках стыка выполнены условия сопряжения:

$$\begin{aligned} &f(l_i-) = f(l_i+)\ , \\ &k_i f^/(l_i-) = f^/(l_i+)\ ,\ i = 1, ..., n\ . \end{aligned}$$

Оператор сглаживания в точке l_i определим равенством:

$$L_i[f] = \theta(x)\theta(l_i - x)\left(k_i f(x) + \frac{1-k_i}{2} f(2l_i - x)\right) + \theta(x - l_i)\frac{k_i+1}{2} f(x). \tag{18.4}$$

Операторы, обратный и сопряженный к L_i, имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} &L_i^{-1}[g] = \theta(x)\theta(l_i - x)\tfrac{1}{k_i}\left(g(x) - \tfrac{1-k_i}{1+k_i} g(2l_i - x)\right) + \\ &+\theta(x - l_i)\tfrac{2}{k_i+1} g(x) \end{aligned}, \tag{18.5}$$

$$\begin{aligned} &L_i^*[g] = \theta(x)\ \theta(l_i - x) k_i g(x) + \\ &+\theta(x - l_i)\ \theta(2l_i - x)\left(\tfrac{1+k_i}{2} g(x) + \tfrac{1-k_i}{2} g(2l_i - x)\right) + \\ &\qquad +\theta(x - 2l_i)\frac{k_i+1}{2} g(x). \end{aligned} \tag{18.6}$$

Произведение операторов $L_1, ..., L_n$ обозначим через L, $L \equiv L_n \cdot ... \cdot L_1$. Обратный и сопряженный к оператору L имеют вид $L^{-1} = L_1^{-1} \cdot ... \ \cdot L_n^{-1}$ и $L^* = L_1^* \cdot ... \ \cdot L_n^*$, соответственно.

Приведем важнейшие свойства операторов сглаживания.

1. Оператор L функции f, кусочно-непрерывно дифференцируемой на I_n^+, сопоставляет функцию $L[f]$, непрерывно-дифференцируемую на полуоси.

2. Если в выражении для оператора Γ положить $h_i = \frac{1-k_i}{1+k_i}, i = 1, ..., n$, то справедливо равенство $L[f]|_{x=0} = \Gamma[f]|_{x=0}$.

18.3 Применение операторов преобразования в теории интегральных преобразований.

Теорема разложения по собственным функциям оператора Фурье $-\frac{d^2}{dx^2}$ для кусочно-однородного полупространства формулируется следующим образом.

Теорема 18.1 . *Если функция $y = f(x)$ определена на I_n^+, кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на I_n^+, то для каждого $x \in I_n^+$ справедливо интегральное представление*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} [\sin \lambda x] \left(\int_0^\infty L^* \cdot \Gamma^* [\sin \lambda \xi] f(\xi) d\xi \right) d\lambda. \qquad (18.7)$$

Доказательство. В силу построения операторов L и Γ функция $\Gamma \cdot L[f]$ удовлетворяет условиям теоремы разложения для sin- преобразования Фурье. Тогда

$$\Gamma \cdot L[f](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda x \left(\int_0^\infty \sin \lambda \xi \quad \Gamma \cdot L[f](\xi) d\xi \right) d\lambda.$$

Действуя обратным оператором $L^{-1} \cdot \Gamma^{-1}$ на обе части записанного представления в соответствии с определением сопряженных операторов L^* и Γ^* установим требуемый результат.

Теорема разложения позволяет определить прямой и обратный операторы Фурье на действительной кусочно-однородной полуоси по правилам:

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} L^* \cdot \Gamma^* [\sin \lambda\xi] \, f(\xi) \, d\xi, \tag{18.8}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} [\sin \lambda x] \, \hat{f}(\lambda) \, d\lambda. \tag{18.9}$$

Замечание18.1. Установленные нами интегральные преобразования (18.8)-(18.9) получены ранее методом δ - образных последовательностей в работе [20], однако в ней не была выявлена внутренняя структура ядра.

18.4 Операторы L и Γ для кусочно-однородного пространства.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на кусочно-однородной оси I_n,

$$I_n = \left\{ x : \ x \in \bigcup_{j=0}^{n+1} (l_{j-1}, l_j) \ , \ l_{-1} = -\infty, \ \ l_{n+1} = \infty, \ \ l_{j-1} < l_j, \ \right\}.$$

Введем серию операторов сглаживания L_i :

$$L_i[f] = \theta(l_i - x)\left(k_i f(x) + \frac{1-k_i}{2} f(2l_i - x)\right) + \theta(x - l_i)\frac{k_i+1}{2} f(x),$$

где функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения в точках стыка интервалов

$$\begin{aligned} &f(l_i-) = f(l_i+) \ , \\ &k_i f^{/}(l_i-) = f^{/}(l_i+) \ , i = 0, ..., n \ . \end{aligned} \tag{18.10}$$

Свойства операторов L_i :

1. Каждая из функций $g_i = L_i[f]$ - непрерывно- дифференцируема в точке l_i.

2. Каждая из функций $g_{\mathrm{i}} = L_i[f]$ в точках $l_j, j > i$ удовлетворяет условиям сопряжения (18.10).

3. Оператор, обратный к L_i, имеет вид:

$f(x) \equiv L_i^{-1}[g] =$

$$= \theta\left(l_i - x\right)\frac{1}{k_i}\left(g\left(x\right) - \frac{1-k_i}{1+k_i}g\left(2l_i - x\right)\right) + \theta\left(x - l_i\right)\frac{2}{k_i+1}g\left(x\right).$$

4. Оператор, сопряженный к L_i, определяется равенством:

$$L_i^*\left[g\right] = \theta\left(l_i - x\right)\ k_i g\left(x\right) + \theta\left(x - l_i\right)\ \left(\frac{1+k_i}{2}g\left(x\right) + \frac{1-k_i}{2}g\left(2l_i - x\right)\right).$$

Введем также серию граничных операторов

$\Gamma_i =$

$$\theta\left(l - x\right)\ \left(g\left(x\right) + h_i h_0 \cdot g\left(2l_i - x\right)\right) + \theta\left(x\right)\ \left(g\left(x\right) + h_i h_0 \cdot g\left(2l_i + x\right)\right) g\left(x\right)\ .$$

$h_i = \dfrac{1-k_i}{1+k_i}, i = 0, 1, ..., n.$

Операторы, обратный и сопряженный к граничным Γ_i, имеют вид:

$$\Gamma_i^{-1}\left[p\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-1\right)^j h_i^j h_0^j \cdot \left(\theta\left(-x\right)\ p\left(2l_i \cdot j - x\right) + \theta\left(x\right)\ p\left(x + 2l_i \cdot j\right)\right)$$

$\Gamma_i^*\left[f\right] = f\left(x\right) + h_i h_0 \theta\left(x - 2l_i\right)\left(f\left(2l_i - x\right) + f\left(2l_i + x\right)\right),$

соответственно.

Определим, наконец, операторы $L \equiv L_n \cdot ... \cdot L_1$ и $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, для которых будем иметь:

$L^{-1} = L_1^{-1} \cdot ... \cdot L_n^{-1}\,; L^* = L_1^* \cdot ... \cdot L_n^*\,; \Gamma^* = \Gamma_1^* \cdot ... \cdot \Gamma_n^*\,; \Gamma^{-1} = \Gamma_1^{-1} \cdot ... \cdot \Gamma_n^{-1}.$

Теорема 18.2 . *Если функция f удовлетворяет в точках стыка $l_0, l_1, ..., l_n$ условиям сопряжения (18.10), то функция $\hat{f} = L_0 \cdot \Gamma \cdot L\left[f\right]$ непрерывна во всех точках стыка $l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n$ таких, что $l_i - l_0 \le l_{i+1} - l_i, i = 1, ..., n-1$.*

Как и в случае полупространства с помощью оператора $L_0 \cdot \Gamma \cdot L$ можно решить следующие задачи:

1. Получить теорему разложения для кусочно-однородного пространства;

2. Ввести интегральные преобразования Фурье для кусочно- однородного пространства.

3. Получить аналоги классических формул математической физики: формулы Кирхгофа в теории уравнений гиперболического типа, формулы Пуассона в теории уравнений параболического типа.

Приведем теорему разложения:

Теорема 18.3 . *Если функция* $y = f(x)$ *определена на* I_n, *кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на* I_n, *то для каждого* $x \in I_n$ *справедливо интегральное представление*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot L_0^{-1} \left[e^{i\lambda x} \right] \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} L^* \cdot \Gamma^* \cdot L_0^* \left[e^{-i\lambda \xi} \right] f(\xi)\, d\xi \right) d\lambda. \tag{18.10}$$

Доказательство. Из конструкции операторов L и Γ следует, что функция $L_0 \cdot \Gamma \cdot L[f]$ удовлетворяет условиям теоремы разложения для классического преобразования Фурье. Тогда

$$L_0 \cdot \Gamma \cdot L[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} L_0 \cdot \Gamma \cdot L[f](\xi)\, d\xi \right) d\lambda.$$

Действуя обратным оператором $L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot L_0^{-1}$ на обе части записанного представления в соответствии с определением сопряженных операторов L^* и Γ^*, установим требуемый результат.

Теорема разложения позволяет определить прямой и обратный операторы Фурье на действительной кусочно-однородной оси по правилам:

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^* \cdot \Gamma^* \cdot L_0^* \left[e^{-i\lambda \xi} \right] f(\xi)\, d\xi, \tag{18.11}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot L_0^{-1} \left[e^{i\lambda x} \right] \hat{f}(\lambda)\, d\lambda. \tag{18.12}$$

Глава 19

Операторный метод для функций кусочно-аналитических в правой полуплоскости

19.1 Операторы Γ_i и их свойства.

Пусть функция $f = f(z)$ определена и ограничена в полуплоскости $Rez \geq l_0$. Введем оператор Γ_i :

$$\Gamma_i [f] = \theta (x - l_0) f (z) + \theta (x - l_0)\ h_i f (z + 2l_i)\ ,\ i = 1, ..., n,\ 0 < h_i < 1, \tag{19.1}$$

где θ - единичная функция Хевисайда, $l_1, l_2, ...,\ l_n$ точки на полуоси такие, что $l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n$; $l_i - l_0 \leq l_{i+1} - l_i, i = 1, ..., n-1$. В дальнейшем, не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что $l_0 = 0$. Оператор, обратный к оператору Γ_i, действует на функцию g ограниченную и аналитическую в полуплоскости $x \geq l_0$, по правилу:

$$\Gamma_i^{-1} [g] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k g (z + 2l_i \cdot k)\,. \tag{19.2}$$

Оператор, сопряженный к оператору Γ_i, имеет вид:

$$\Gamma_i^* [g] = \theta (x) g (z) + h\theta (x - 2l_i) g (z - 2l_i)\,. \tag{19.3}$$

Произведение операторов $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ обозначим символом Γ, $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$.

Из формулы (19.1) получим выражение для обратного оператора Γ^{-1} :

$$\Gamma^{-1}[g] = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} (-1)^k h^k g(z + 2l \cdot k), h^k = h^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h^{k_n}, l \cdot k = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot k_i \,.$$

Оператор, сопряженный к $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, имеет вид $\Gamma^* = \Gamma_1^* \cdot ... \ \cdot \Gamma_n^*$.

19.2 Операторы сглаживания L_i.

Пусть функция $f = f(z)$ задана в кусочно-однородной полуплоскости I_n^+ кусочно-аналитическая на I_n^+, причем на прямых сопряжения выполнено условие:

$$f^-(\eta) = f^+(\eta) + k_i \overline{f^+(\eta)}, \quad Re\eta = l_i,$$

k_i - действительное, $|k_i| < 1$. Оператор сглаживания на прямой $Rez = l_i$ определим равенством:

$$L_i[f] = \theta(x)\ \theta(l_i - x)\ \left(f(z) - k_i \cdot \overline{f(2l_i - \overline{z})}\right) + \theta(x - l_i) f(z)\,. \quad (19.4)$$

Оператор, обратный к L_i, имеет вид:

$$L_i^{-1}[g] = \theta(x)\theta(l_i - x)\ \left(g(z) - k_i \cdot \overline{g(2l_i - \overline{z})}\right) + \theta(x - l_i)\ g(z)\,. \quad (19.5)$$

Произведение операторов $L_1, ..., L_n$ обозначим через L, $L \equiv L_n \cdot ... \cdot L_1$. Оператор, обратный к оператору L, имеет вид $L^{-1} = L_1^{-1} \cdot ... \ \cdot L_n^{-1}$.

Приведем важнейшие свойства операторов сглаживания.

1. Оператор L функции f, кусочно-аналитической в I_n^+, сопоставляет функцию $\hat{f} = L[f]$, аналитическую в полуплоскости $x \geq l_0$.

2. Справедливо равенство

$ReL[f]\Big|_{x=0} = Re\,\Gamma[f]\Big|_{x=0}$,

при этом в выражении для оператора Γ положено $h_i = -k_i, i = 1, ..., n$.

19.3 Формула Шварца для кусочно-однородного полупространства.

Формула Шварца в случае кусочно-однородного полупространства решает следующую задачу: найти функцию $f = f(z)$, аналитическую в кусочно-однородной полуплоскости $\{z = x + iy : x \in I_n^+, y \in R\}$, по граничному значению действительной части Ref и условиям сопряжения

$$f^-(\eta) = f^+(\eta) + k_i\overline{f^+(\eta)}, \quad Re\eta = l_i, i = 1, ..., n.$$

Применение оператора $\Gamma \cdot L$, сводит поставленную задачу к соответствующей задаче для однородной полуплоскости, таким образом, формула Шварца для кусочно-однородной полуплоскости будет иметь вид:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1}\left[\frac{1}{t-z}\right] Ref(t)\, dt + iC,$$

где C- действительная константа.

Следствие 19.1. Выпишем в явном виде формулу Шварца с одной линией сопряжения:

$$f(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} k^j \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t-z-2lj} - k \cdot \frac{1}{t+z-2(l+1)j}\right] Ref(t)\, dt + (1-k)\ C, ; \\ \qquad\qquad 0 < x < l, y \in R \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} k^j \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z-2lj} Ref(t)\, dt + iC, \\ \qquad\qquad l < x, y \in R\ . \end{cases}$$

19.4 Формула Пуассона для кусочно-однородного полупространства.

Задача Дирихле в случае кусочно-однородного полупространства ставится следующим образом: найти решение $u = u(y, x)$ уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x \in I_n^+, y \in R,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{x=0} = f(y)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{array}{l} u(y, l_i-) = u(y, l_i+)\ , \\ k_i u_x^{/}(y, l_i-) = u_x^{/}(y, l_i+)\ , i = 1, ..., n. \end{array}$$

Применение оператора $\Gamma \cdot L$ приводит поставленную задачу к задаче Дирихле для однородной полуплоскости. В итоге для решения $u = u(y, x)$ будем иметь:

$$u(y, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \left[\frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} \right] f(\eta)\, d\eta.$$

Следствие 19.2. Формула Пуассона с одной прямой сопряжения $x = l$ принимает вид:

$$u(y, x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^j \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x+2lj}{(x+2lj)^2 + (y-\eta)^2} - \right. \\ \left. -\frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{2l(j+1)-x}{(2l(j+1)-x)^2 + (y-\eta)^2} \right] f(\eta)\, d\eta,\ 0 < x < l, y \in R; \\ \frac{2k}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^j \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2lj}{(x+2lj)^2 + (y-\eta)^2} f(\eta)\, d\eta,\ l < x, y \in R\ . \end{cases}$$

Глава 20

Операторный метод для функций кусочно-аналитических в круге

20.1 Операторы Γ_i и их свойства .

Рассмотрим следующие операторы: для функции $f = f(z)$, ограниченной и гармонической в круге B= $\{z : |z| \leq r_0\}$ положим:

$$\Gamma_i[f] = \chi_B(z)\ f(z) + \chi_B(z)\ h_i f\left(z \cdot r_i^2\right),\ i = 1, ..., n,\ 0 < h_i < 1, \quad (20.1)$$

$\chi_B(z)$ - характеристическая функция множества $B, r_0, r_1, r_2, ..., \ r_n, r_{n+1}$ - точки на $[0, 1]$, такие, что

$1 = r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n > r_{n+1} = 0$; $\frac{r_i}{r_0} \leq \frac{r_{i+1}}{r_i}, i = 1, ..., n-1.$

Оператор, обратный к Γ_i, действует на функцию g, ограниченную и аналитическую в круге B по правилу:

$$\Gamma_i^{-1}[g] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k g\left(z \cdot r_i^{2k}\right). \quad (20.2)$$

Произведение операторов $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ обозначим символом Γ, $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$.

Из формулы (20.1) получим выражение для обратного оператора Γ^{-1} :

$$\Gamma^{-1}[g] = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} (-1)^k h^k g\left(z \cdot r^{2k}\right) \ , \ h^k = h^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h^{k_n}, r^{2k} = \prod_{i=1}^{n} r_i^{2k_i} \ .$$

20.2 Операторы сглаживания L_i.

Пусть функция $f = f(z)$ аналитическая в кусочно-однородном круге B_n^+ :

$B_n^+ = \bigcup\limits_{j=0}^{n} B_j, B_j = \{\ z : r_{j+1} < |z| < r_j\}, j = 0, ..., n,$

причем на окружностях сопряжения выполнены условия сопряжения:

$$f^-(\eta) = f^+(\eta) + k_i\overline{f^+(\eta)}, \quad Re\eta = l_i, i = 1, ..., n,$$

k_i - действительное $f^-(\eta), f^+(\eta)$ - предельные значения функции $f = f(z)$ извне и изнутри круга $|z| < r_i$, соответственно. Оператор сглаживания для линии сопряжения $|\eta| = r_i$ определим равенством:

$$L_i[u] = \chi_{E_i^-}(z)\left(f(z) - k_i\overline{f\left(\frac{z \cdot r_i^2}{|z|^2}\right)}\right) + \chi_{E_i^+}(z) f(z) \ , \qquad (20.3)$$

где

$$E_i^+ = \{z : |z| < r_i\}, \ E_i^- = \{z : |z| > r_i\}.$$

Оператор, обратный к оператору L_i, имеет вид:

$$L_i[g] = \chi_{E_i^-}(z) \ \left(g(z) + k_i\overline{g\left(\frac{z \cdot r_i^2}{|z|^2}\right)}\right) + \chi_{E_i^+}(z) \ g(z); \qquad (20.4)$$

Примем обозначения: $L \equiv L_n \cdot ... \cdot L_1, \ L^{-1} = L_1^{-1} \cdot ... \ \cdot L_n^{-1}$.

Приведем важнейшие свойства операторов сглаживания.

1. Оператор L функции f, кусочно-аналитической в B_n^+, сопоставляет функцию $\hat{f} = L[f]$, аналитическую в единичном круге.

2. Справедливо равенство

$ReL[f] = Re\Gamma[f] \ , |\eta| = 1,$

при этом в выражении для оператора Γ положено $h_i = -k_i, i = 1, ..., n.$

20.3 Формула Шварца для функций кусочно-аналитических в круге.

Формула Шварца в случае кусочно-однородного круга решает следующую задачу: найти функцию $f = f(z)$ аналитическую в кусочно-однородном круге B_n^+ по граничному значению ее действительной части и по условиям сопряжения:

$f^-(\eta) = f^+(\eta) + k_i\overline{f^+(\eta)}, \quad |\eta| = r_i, i = 1, ..., n$.

Применение оператора $\Gamma \cdot L$ позволяет получить формулу Шварца для кусочно-однородного круга:

$$f(z) = L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathrm{C}} \left[\frac{1}{\eta - z}\right] Ref(t)\, dt - \prod_{i=1}^{n} (1 - k_i)\, \overline{f(0)},$$
$$C = \{\eta : |\eta| = 1\}, z \in B_n^+.$$

Следствие 20.1. Выпишем в явном виде формулу Шварца с одной окружностью сопряжения $\{z : |z| = r\}$; $0 < r < 1$:

$$f(z) = \begin{cases} -\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - k_i)\overline{f(0)} + \sum\limits_{j=0}^{\infty} k^j \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathrm{C}} \left(\frac{1}{\eta - zr^{2j}} - \frac{k}{\eta - \frac{z}{|z|^2} r^{2j+2}}\right) Ref(\eta)\, d\eta; \\ r < |z| < 1; \\ \qquad -\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - k_i)\overline{f(0)} + \sum\limits_{j=0}^{\infty} k^j \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C} \frac{1}{\eta - zr^{2j}} Ref(\eta)\, d\eta, \\ \qquad |z| < r. \end{cases}$$

Глава 21

Метод операторов преобразования в задачах математической физики однородных сред

21.1 Третья краевая задача со сдвигом для однородного полупространства.

Пусть функция $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$ гармонична в полупространстве R^+_{m+1} и принадлежит классу
$H^{\alpha}_2 \left(R^+_{m+1}\right)$, $\alpha \geq 2$. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, (x, y) \in R^+_{m+1}$$

с граничным условием

$$h_1 u(x, 0) + h_2 u(x, l) + \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = \hat{u}(x, 0) \ , l > 0,$$

где $h_1 < h_2 < 0$ постоянные, $\hat{u}(x, 0)$ - след функции $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$ на гиперплоскости $y = 0$. Непосредственная проверка показывает, что решение поставленной задачи существует, единственно, принадлежит классу $H^{\alpha+1}_2 \left(R^+_{m+1}\right)$, $\alpha \geq 2$, и имеет вид:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} L^{-1}\left[P\left(x-\xi, y\right)\right]\ \hat{u}\left(\xi, 0\right) d\xi,$$

где $P\left(x-\xi, y\right)$ - ядро Пуассона для полупространства, L^{-1} - оператор преобразования из H_2^{α} в $H_2^{\alpha+1}$, действующий по правилу $L^{-1}: \hat{u} \to u$,

$$L^{-1}\left[\hat{u}\right] = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_2^j \varepsilon^j}{j!} \int_0^{\infty} e^{h_1\,\varepsilon} \hat{u}\left(x, y+2lj+\varepsilon\right) d\varepsilon.$$

Заметим, что L^{-1} - оператор, обратный к оператору $L = h_1 + h_2\Gamma + \frac{\partial}{\partial y}$, где Γ - оператор сдвига: $\Gamma\left[u\right] \equiv u\left(x, y+l\right).$

21.2 Задача Дирихле для однородной полосы.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полосе:

$$\Delta u = 0, \quad x \in R^m,\ 0 < y < l\ ,$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{l} u\left(x, 0\right) = \hat{u}\left(x, 0\right)\ , \\ u\left(x, l\right) = 0, \end{array}$$

где $\hat{u}\left(x, 0\right)$ - след на гиперплоскости $y = 0$ функции $\hat{u} = \hat{u}\left(x, y\right)$. Функция $\hat{u} = \hat{u}\left(x, y\right)$ гармоническая в $R_{m+1}^{+}: \hat{u} \in H_2^{\alpha}\left(R_{m+1}^{+}\right)$ $, \alpha \geq 2$, $m \geq 2$ и $\left(1 + |x|^2 + y^2\right)^{\beta} \hat{u} \in H_2^{\alpha}\left(R_2^{+}\right)$ при $m = 2$, для некоторого $\beta > 0$.

Оператор преобразования $J: \hat{u} \to u$ задается формулой:

$$J\left[\hat{u}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\hat{u}\left(x, y + 2l \cdot j\right) - \hat{u}\left(x, 2l - y + 2l \cdot j\right) \Big).$$

Следовательно, для решения задачи Дирихле в полосе имеем:

$$u\left(x, y\right) = \int_{R^{\mathrm{m}}} J\left[P\left(x-\xi, y\right)\right] \cdot\ \hat{u}\left(\xi, 0\right) d\xi,$$

где $P(x-\xi,y)$ - ядро Пуассона для полупространства. Суммируя в полученной формуле ядро, найдем многомерный аналог формулы Палатини для полосы [18]:

$$u(x,y)=\int\limits_{R^m} P_m(|x-\xi|,y)\cdot\ \hat{u}(\xi,0)\,d\xi,$$

где

$$P_m(|x-\xi|,y)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-2}\pi^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\int\limits_0^1\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{m-3}{2}}\cdot P_1(\varepsilon|x-\xi|\ ,y)\,d\varepsilon,$$

P_1 - ядро Пуассона для полосы в R_2^+.

21.3 Условия периодичности для однородной полосы.

Рассмотрим задачу Дирихле для функции $u=u(x,y)$, гармонической в полосе $\Pi=\{(x,y):x\in R^m, 0<y<l\}$:

$$\Delta u=0,(x,y)\in\Pi$$

с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned}&u(x,0)=u(x,l)+\hat{u}(x,0)\ ,\\ &u^{/}(x,0)=u^{/}(x,l)\ ,\end{aligned}$$

здесь функция $\hat{u}=\hat{u}(x,y)$, гармоническая в R_{m+1}^+, $\hat{u}\in H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)$, $\alpha\geq 2$, $m\geq 2$ и $\left(1+|x|^2+y^2\right)^\beta\hat{u}\in H_2^\alpha\left(R_2^+\right)$, $\alpha\geq 2$ при $m=2$, для некоторого $\beta>0$. Оператор преобразования $J:\hat{u}\to u$ определяем равенством:

$$J[\hat{u}]=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\hat{u}(x,y+l\cdot j)-\hat{u}(x,l-y+l\cdot j)\Big).$$

В итоге для решения краевой задачи с условиями периодичности получаем формулу:

$$u(x,y)=\int\limits_{R^m} J[P(x-\xi,y)]\cdot\ \hat{u}(\xi,0)\,d\xi,$$

где $P(x-\xi, y)$ - ядро Пуассона для полупространства.

21.4 Теплопроводность в ограниченном стержне.

Рассмотрим смешанную краевую задачу для функции $u = u(t,x)$ в области $\{\ (t,x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq l\ \}$, удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \{\ (t,x) : t > 0, 0 < x < l\ \}$$

начальному условию

$$u(0,x) = 0,$$

граничным условиям

$$\begin{array}{l} u(t,0) = \hat{u}(t,0)\ \ , \\ hu(t,l) + \frac{\partial}{\partial x} u(t,l) = 0\ . \end{array}$$

Пусть функция $\hat{u} = \hat{u}(t,x)$ определена в области $\{\ (t,x) : t \geq 0, x \geq 0\ \}$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}, \{\ (t,x) : t > 0\ , x > 0\ \}$$

и начальному условию

$$\hat{u}(0,x) = 0.$$

Для каждого значения t функция $\hat{u}(t,x)$ предполагается такой, что для некоторого фиксированного $\beta > 0$ выполнено
$e^{-\beta x}\hat{u} \in H_2^{\alpha}(x \geq 0)\ \ , \alpha \geq 2,$
причем $e^{-\beta x}\hat{u}$ имеет в классе $H_2^{\alpha}(x \geq 0)$ рост не выше степенного, т.е. для некоторых c, k выполняется неравенство:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-2\beta x} |\hat{u}(t,x)|^2 \, dx \leq ct^k.$$

Оператор преобразования $J : \hat{u} \to u$ определяется формулой:

$$u =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-h\varepsilon}\left(\frac{L_{j+1}\left(2h\varepsilon\right)}{\left(j+1\right)!}\hat{u}\left(t,2l-x+2lj\right)-\frac{L_j\left(2h\varepsilon\right)}{j\,!}\hat{u}\left(t,x+2lj\right)\right)\,d\varepsilon\right),$$

$L_j\left(x\right)=e^x\dfrac{d^j}{dx^j}\left(e^{-x}x^n\right)$ - полиномы Чебышева-Лаггера [19].

Применив оператор преобразования $J:\hat{u}\to u$, для неизвестной структуры температурного поля $u=u\left(t,x\right)$ найдем выражение:

$$u=J\left[\hat{u}\left(t,x\right)\right],$$

где $\hat{u}=\hat{u}\left(t,x\right)$ выражается формулой [18]:

$$\hat{u}\left(t,x\right)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\hat{u}\left(\tau,0\right)}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}}\,d\tau.$$

Глава 22

Метод операторов преобразования в задачах математической физики кусочно-однородных сред

22.1 Кусочно-однородное пространство

Примем обозначение

$$I_{n+1} = \left\{ y : \ y \in \mathop{U}\limits_{j=0}^{n+1} (l_{j-1}, l_j) \ \ , \ \ l_{-1} = -\infty, \ l_{n+1} = \infty, \ \ l_j < l_{j+1} \right\},$$

числа $0 = l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n$ такие, что $l_i - l_0 \leq l_{i+1} - l_i$, .
В $R^m \times I_{n+1}$ рассмотрим сепаратную систему уравнений Лапласа:

$$\Delta u_i = 0, (x, y) \in R^m \times (l_{i-1}, l_i) \ , \ i = 0, 1, ..., n+1$$

по условиям сопряжения на гиперплоскости $y = l_0$

$$\begin{array}{l} u_0 (x, l_0) - u_1 (x, l_0) = \hat{u} (x, l_0) \ , \\ k_0 \frac{\partial}{\partial y} u_0 (x, l_0) = \frac{\partial}{\partial y} u_1 (x, l_0) \end{array}$$

по условиям сопряжения на гиперплоскостях $y = l_i$

$$u_j(x,l_j) = u_{j+1}(x,l_j)\ ,$$
$$k_j \tfrac{\partial}{\partial y} u_j(x,l_j) = \tfrac{\partial}{\partial y} u_{j+1}(x,l_j)\,, j=1,...,n,$$

где $\hat{u}(x,l_0)$ - след на гиперплоскости $y = l_0$ функции $\hat{u} = \hat{u}(x,y)\,,$ гармонической из класса $H_2^{\alpha}\left(R_{m+1}^{+}\right)\ , \alpha \geq 2$. Из определения оператора преобразования следует, что решение поставленной задачи существует единственно, принадлежит классу $H_2^{\alpha}\left(R_m \times I_{n+1}\right)\ , \alpha \geq 2$, и имеет вид:

$$u(x,y) = \int\limits_{R^m} J\left[P\left(x-\xi, y-l_0\right)\right] \cdot\ \hat{u}(\xi,l_0)\ d\xi,$$

где $P(x,y)$ - ядро Пуассона для полупространства, J - оператор преобразования $J : \hat{u} \to u$,

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} \theta\left(y - l_{k-1}\right)\, \theta\left(l_k - y\right)\ \ u_k(x,y)\,,$$

$$J[\hat{u}] = \Lambda^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \Lambda_0^{-1} \left(\frac{1}{2}\theta(-y)\, S - \frac{1}{2}\theta(y)\, E\right)[\hat{u}]\,,$$

S - оператор отражения: $S : \hat{u} \to \hat{u}(x,-y)\,,$ E - единичный оператор, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1$ и $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$,

$$\Lambda_i[f] = \theta(l_i - y)\left(k_i f(x,y) + \frac{1-k_i}{2} f(x, 2l_i - y)\right) + \theta(y - l_i)\,\frac{k_i+1}{2} f(x,y)\,,$$

$$\Gamma_i[g] = g(x,y) + \frac{1-k_i}{1+k_i}\frac{1-k_0}{1+k_0}\cdot$$
$$\Big(\theta(l_i - y)\, g(x, 2l_i - y) + \theta(y - l_i)\, g(x, 2l_i + y)\Big)\ .$$

Операторы, обратные к Λ_i и Γ_i, имеют вид, соответственно:

$$\Lambda_i^{-1}[g] = \theta(l_i - y)\,\tfrac{1}{k_i}\left(g(x,y) - \tfrac{1-k_i}{1+k_i} g(x, 2l_i - y)\right) +$$
$$+\theta(y - l_i)\,\tfrac{2}{k_i+1} g(x,y)\,,$$

$$\Gamma_i^{-1}[h] = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1-k_i}{1+k_i}\right)^j \left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^j$$

$$\left(\theta\left(-y\right)\cdot h\left(x,2l_i\cdot j-y\right)+\theta\left(y\right)\cdot h\left(x,y+2l_i\cdot j\right)\right)\ .$$

22.2 Задача Дирихле для кусочно-однородного полупространства.

Введем обозначения:

В кусочно-однородном пространстве $R^m\times I_n^+$ рассмотрим задачу Дирихле для сепаратной системы уравнений Лапласа:

$$\Delta u_i=0,(x,y)\in R^m\times\left(l_{i-1},l_i\right)\ ,\ i=1,...,n,$$

по граничному условию

$$u_1\left(x,l_0\right)=\hat{u}\left(x,l_0\right),$$

по условиям сопряжения

$$\begin{array}{l} m_ju_j\left(x,l_j\right)=u_{j+1}\left(x,l_j\right)\ , \\ k_j\frac{\partial}{\partial y}u_j\left(x,l_j\right)=\frac{\partial}{\partial y}u_{j+1}\left(x,l_j\right)\ ,j=1,...,n\ , \end{array}$$

где $\hat{u}\left(x,l_0\right)$ - след на гиперплоскости $y=l_0$ функции $\hat{u}=\hat{u}\left(x,y\right),$ гармонической из класса $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)\ ,\alpha\geq 2.$

Решение $u=u\left(x,y\right),$

$$u\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(y-l_{k-1}\right)\ \theta\left(l_k-y\right)\ u_k\left(x,y\right)+\ \theta\left(y-l_n\right)\ u_{n+1}\left(x,y\right)$$

существует, единственно и принадлежит классу
$H_2^\alpha\left(R_m\times I_{n+1}^+\right)\ ,\alpha\geq 2:$

$$u\left(x,y\right)=\int\limits_{R^m}J\left[P\left(x-\xi,y-l_0\right)\right]\cdot\ \hat{u}\left(\xi,l_0\right)d\xi,$$

где $P\left(x,y\right)$ - ядро Пуассона для полупространства, J - оператор преобразования:

$$J\left[\hat{u}\right]=\Lambda^{-1}\cdot\Gamma^{-1}\left[\hat{u}\right].$$

При этом

$$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1, \Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1,$$

$$\Gamma_i [f] = \theta (y - l_0) f (x, y) + \theta (y - l_0) \frac{m_j - k_i}{m_j + k_i} f (x, y + 2l_i), \quad 0 < h_i < 1,$$

$$\Lambda_i [f] = \theta (y) \theta (l_i - y) \left(\tfrac{k_i}{m_i} f (x, y) + \tfrac{m_i - k_i}{2m_i} f (x, 2l_i - y) \right) +$$
$$+\theta (y - l_i) \tfrac{m_i + k_i}{2m_i} f (x, y)$$

оператор Γ^{-1} имеет вид:

$$\Gamma^{-1} [g] = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} (-1)^k h^k g (x, y + 2l \cdot k),$$

далее $\Lambda^{-1} = \Lambda_1^{-1} \cdot \ldots \Lambda_n^{-1}$,

$$\Lambda_i^{-1} [g] = \theta (y) \theta (l_i - y) \tfrac{m_i}{k_i} \left(g (x, y) - \tfrac{m_i - k_i}{m_i + k_i} g (x, 2l_i - y) \right) +$$
$$+\theta (y - l_i) \tfrac{2m_i}{m_i + k_i} g (x, y),$$

где

$$h^k = h_1^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h_n^{k_n}, \ h_i = \frac{m_j - k_i}{m_j + k_i}, \ l \cdot k = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot k_i.$$

22.3 Полупространство с неоднородными условиями сопряжения.

Лемма 22.1 *Пусть функция $\hat{v} = \hat{v} (x, y)$ - гармонична в полупространстве $R_{m+1}^{+} = \{ (x, y) : x \in R^m, y \in R \}$ и принадлежит классу $H_2^{\alpha} \left(R_{m+1}^{+} \right)$, $\alpha \geq 2$. Решение $u (x, y) = \theta (y - l_0) \theta (l - y) u_1 (x, y) + \theta (y - l) u_2 (x, y)$ краевой задачи сопряжения в кусочно- однородном полупространстве $R^m \times I_1^{+}$ для сепаратной системы уравнений Лапласа*

$$\Delta u_1 = 0, (x, y) \in R^m \times (l_0, l) \ , \quad \Delta u_2 = 0, (x, y) \in R^m \times (l, \infty)$$

с граничным условием

$$u_1\left(x,l_0\right)=0$$

и условиями сопряжения

$$u_1\left(x,l\right)-u_2\left(x,l\right)=\hat{v}\left(x,l\right)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}u_1\left(x,l\right)=\frac{\partial}{\partial y}u_2\left(x,l\right)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}u_1&=-\tfrac{1}{2}\hat{u}\left(x,y+2l\right)+\tfrac{1}{2}\hat{u}\left(x,2l-y\right)\ ,\ 0<y<l\ ,\\ u_2&=-\tfrac{1}{2}\hat{u}\left(x,y+2l\right)-\tfrac{1}{2}\hat{u}\left(x,y\right)\ ,\ l<y.\end{aligned}$$

Таким образом, задан оператор преобразования: $T:\hat{u}\to u$.

В кусочно- однородном полупространстве $R^m\times I_1^+$ рассмотрим задачу о решении сепаратной системы уравнений Лапласа:

$$\Delta z_1=0,(x,y)\in R^m\times\left(l_0,l\right)\ ,\quad \Delta z_2=0,(x,y)\in R^m\times(l,\infty)$$

с граничным условием

$$z_1\left(x,l_0\right)=0$$

и неоднородными условиями сопряжения

$$z_1\left(x,l\right)-z_2\left(x,l\right)=\hat{v}\left(x,l\right)\ ,\quad k\frac{\partial}{\partial y}z_1\left(x,l\right)=\frac{\partial}{\partial y}z_2\left(x,l\right)\ ,$$

где $\hat{v}\left(x,l\right)$ - след на гиперплоскости $y=l$ функции $\hat{v}=\hat{v}\left(x,y\right)$ гармонической в $R_{m+1}^+=R^m\times(l,\infty)$ из класса $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)\ ,\ \alpha\geq 2$. Применение оператора преобразования J, порождаемого рассматриваемой краевой задачей, дает выражение для z,

$$z=J\left[u\right],$$

$$z\left(x,y\right)=\theta\left(y-l_0\right)\,\theta\left(l-y\right)\,z_1\left(x,y\right)+\,\theta\left(y-l\right)\,z_2\left(x,y\right),$$

где $u=u\left(x,y\right)$ - решение вспомогательной задачи сопряжения. Из леммы 22.1 следует равенство:

$$z(x,y) = \int\limits_{R^m} J \cdot T\left[P(x-\xi, y-l)\right] \cdot\ \hat{v}(\xi, l)\, d\xi,$$

при этом функция z из класса $H_2^\alpha\left(R_m \times I_1^+\right)$, $\alpha \geq 2$,

22.4 Операторы преобразования и векторные краевые задачи

1. Третья краевая задача для однородного полупространства. Пусть вектор-

функция $\hat{u} = \hat{u}(x,y)$ гармонична в полупространстве

$$R_{m+1}^+ = \{\ (x,y) : x \in R^m, y > 0\ \}$$

и принадлежит классу $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)$, $\alpha \geq 2$ (см.[1]). Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, (x,y) \in R_{m+1}^+$$

с граничными условиями

$$Hu(x,0) + \frac{\partial}{\partial y} u(x,0) = \hat{u}(x,0)$$

где H -симметрическая матрица, у которой соответствующая квадратическая форма отрицательно определенная, $\hat{u}(x,0)$ - след вектор-функции $\hat{u} = \hat{u}(x,y)$ на плоскости $y = 0$ (см.[1]). Решение $u = u(x,y)$ поставленной задачи существует, единственно и принадлежит классу $H_2^{\alpha+1}\left(R_{m+1}^+\right)$ см. [1]. Таким образом, для любой функции $\hat{u}$, гармонической в R_{m+1}^+ , определен оператор преобразования $J \equiv L_h^{-1}$, действующий из $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)$ в $H_2^{\alpha+1}\left(R_{m+1}^+\right)$ по правилу $L_h^{-1} : \hat{u} \to u$. Свойства оператора L_h^{-1} :

1) оператор $L_h = h + \frac{\partial}{\partial y}$ является обратным к L_h^{-1} ,

2) оператор L_h^{-1} можно представить в виде:

$$L_h^{-1}[\hat{u}] = -\int\limits_0^\infty e^{H\varepsilon} \hat{u}(x, y+\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

3) оператор L_h^{-1} продолжается на весь класс функций $H^{\alpha}\left(R_{m+1}^{+}\right)$.
Следовательно, решение третьей краевой задачи имеет вид:

$$u=\int\limits_{-\infty}^{\infty} L_h^{-1}\left[P\left(x-\xi,y\right)\right]\ \hat{u}\left(\xi,0\right)d\xi,$$

где

$$P\left(x-\xi,y\right)=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}\frac{y}{\left[\left(x-\xi\right)^2+y^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}$$

- ядро Пуассона для полупространства.

2. Третья краевая задача для однородного m- мерного шара. Пусть функция $\hat{u}=\hat{u}\left(x\right)$ гармонична в шаре $B_0=\left\{x\in R^m:|x|<1\right\}$ и пусть $\hat{u}\in H_2^{\alpha}\left(B_0\right)$, $(\alpha\geq 2)$. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u=0, x\in B_0$$

с граничными условиями

$$Hu\left(\xi\right)+\frac{\partial}{\partial n}u\left(\xi\right)=\hat{u}\left(\xi\right)\ ,\xi\in S_0,$$

где H симметрическая матрица, такая что квадратическая форма, соответствующая матрице $H-\ E$ -положительно определенная; $\hat{u}=\hat{u}\left(\xi\right)$ - след вектор-функции $\hat{u}=\hat{u}\left(x\right)$ на сфере S_0.

Решение $u=u\left(x\right)$ поставленной задачи существует, единственно и принадлежит классу $u\in H_2^{\alpha+1}\left(B_0\right)$, $(\alpha\geq 2)$ см. [1]. Для каждой гармонической в шаре функции $\hat{u}=\hat{u}\left(\xi\right)$ по правилу $L_h^{-1}:\hat{u}\rightarrow u$ определен оператор преобразования L_h^{-1} из H_2^{α} в $H_2^{\alpha+1}$. Имеем:

1) L_h^{-1} - оператор обратный к оператору $L_h=\ H+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$,

2) на сфере S_0 справедливо равенство: $L_h=H+\frac{\partial}{\partial n}$,

3) $L_h^{-1}\left[\hat{u}\right]=\int\limits_0^1\varepsilon^{H-\ E}\hat{u}\left(\varepsilon\ x\right)d\varepsilon$, (см. [2]).

Решение третьей краевой задачи в шаре имеет вид:

$$u=\int\limits_{S_0} L_H^{-1}\left[P\left(x,\xi\right)\right]\ \hat{u}\left(\xi\right)d\xi,$$

где $P\left(x,\xi\right)$ - ядро Пуассона в шаре.

3. Задача Дирихле для кусочно-однородного полупространства. Введем обозначения:

$$I_n^{+}=\left\{y:\ y\in\mathop{U}\limits_{j=1}^{n+1}\left(l_{j-1},l_j\right)\ ,\ \ l_j<l_{j+1},\ \ \ j=1,...,n-1,\ l_{n+1}=\infty\right\},$$

числа $0 = l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n$ такие, что $l_i - l_{i-1} \le l_{i+1} - l_i$, $i = 1\ ,..., n-1$.

В кусочно-однородном пространстве $R^m \times I_n^+$ рассмотрим задачу Дирихле для сепаратной системы векторных уравнений Лапласа:

$$\Delta u_i = 0, (x, y) \in R^m \times (l_{i-1}, l_i)\ ,\ i = 1, ..., n$$

по граничному условию

$$u_1\,(x, l_0) = \hat{u}\,(x, l_0)$$

по условиям сопряжения

$$\begin{aligned} M_j u_j\,(x, l_j) &= u_{j+1}\,(x, l_j)\ , \\ K_j \tfrac{\partial}{\partial y} u_j\,(x, l_j) &= \tfrac{\partial}{\partial y} u_{j+1}\,(x, l_j)\ , j = 1, ..., n\ , \end{aligned}$$

где $\hat{u}\,(x, l_0)$ - след на плоскости $y = l_0$ вектор-функции $\hat{u} = \hat{u}\,(x, y)$ гармонической из класса $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)$,$\alpha \ge 2$ -симметрические положительно определенные матрицы.

Решение $u = u\,(x, y)$,

$$u\,(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \theta\,(y - l_{k-1})\ \theta\,(l_k - y)\ u_k\,(x, y) +\ \theta\,(y - l_n)\ u_{n+1}\,(x, y)$$

существует, единственно и принадлежит классу $H_2^\alpha\left(R_m \times I_{n+1}^+\right)$,$\alpha \ge 2$:

$$u\,(x, y) = \int\limits_{R^m} J\left[P\,(x - \xi, y - l_0)\right] \cdot\ \hat{u}\,(\xi, l_0)\,d\xi,$$

где $P\,(x, y)$ - ядро Пуассона, J - оператор преобразования:
$J\,[\hat{u}] = \Lambda^{-1}\ \Gamma^{-1}\,[\hat{u}]$. При этом

$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1$,

$\Gamma_i\,[f] = \theta\,(y - l_0)\,f\,(x, y) + \theta\,(y - l_0)\,(M_i - K_i)\,(M_i + K_i)^{-1}\,f\,(x, y + 2l_i)$,

$i = 1, ..., n,\ 0 < h_i < 1\ i = 1, ..., n,\ 0 < h_i < 1$

оператор Γ^{-1} имеет вид:

$$\Gamma^{-1}\,[g] = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} h^k g\,(x, y + 2l \cdot k)\,,$$

где

$$h^k = h_1^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h_n^{k_n}\ , \quad h_i = (\ E -\ K\ _i)\,(\ E + K_i)^{-1}\ , \quad l \cdot k = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot k_i.$$

$$\Lambda_i\left[f\right]=\theta\left(y\right)\theta\left(l_i-y\right)\ M\ _i^{-1}\left(K_if\left(x,y\right)+\frac{E-K_i}{2}f\left(x,2l_i-y\right)\right)+$$
$$+\,\theta\left(y-l_i\right)\ M\ _i^{-1}\frac{E+K_i}{2}f\left(x,y\right),$$

далее $\Lambda^{-1}=\Lambda_1^{-1}\cdot\ldots\Lambda_n^{-1}$,

$$\begin{array}{l}\Lambda_i^{-1}\left[g\right]=\theta\left(y\right)\theta\left(l_i-y\right)K_i^{-1}\cdot\\ \cdot\left(M_ig\left(x,y\right)-\left(\ E-K_i\right)\left(\ E+K_i\right)^{-1}M_ig\left(x,2l_i-y\right)\right)+\\ +2\theta\left(y-l_i\right)\left(\ E+\ K\ _i\right)^{-1}M_ig\left(x,y\right).\end{array}$$

4. Четвертая краевая задача для полупространства.
В кусочно-однородном пространстве $R^m\times I_n^+$ рассмотрим задачу Дирихле для сепаратной системы векторных уравнений Лапласа:

$$\Delta u_i=0,\left(x,y\right)\in R^m\times\left(l_{i-1},l_i\right)\ ,\ i=1,...,n$$

по граничному условию вида:

$$Hu_1\left(x,l_0\right)+u_{1y}^{/}\left(x,l_0\right)=\hat{u}\left(x,l_0\right)$$

по условиям сопряжения

$$\begin{array}{c}M_ju_j\left(x,l_j\right)=u_{j+1}\left(x,l_j\right)\ ,\\ K_j\frac{\partial}{\partial y}u_j\left(x,l_j\right)=\frac{\partial}{\partial y}u_{j+1}\left(x,l_j\right)\ ,j=1,...,n\ ,\end{array}$$

где $\hat{u}\left(x,l_0\right)$ - след на плоскости $y=l_0$ вектор-функции $\hat{u}=\hat{u}\left(x,y\right)$ гармонической из класса $H_2^\alpha\left(R_{m+1}^+\right)\ ,\alpha\geq 2$, -симметрические положительно определенные матрицы.

Решение $u=u\left(x,y\right)$,

$$u\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(y-l_{k-1}\right)\ \theta\left(l_k-y\right)\ u_k\left(x,y\right)+\ \theta\left(y-l_n\right)\ u_{n+1}\left(x,y\right)$$

существует, единственно из класса $H_2^\alpha\left(R_m\times I_{n+1}^+\right)\ ,\alpha\geq 2$:

$$u\left(x,y\right)=\int\limits_{R^m}J\left[P\left(x-\xi,y-l_0\right)\right]\cdot\ \hat{u}\left(\xi,l_0\right)d\xi,$$

где $P\left(x,y\right)$ - ядро Пуассона для полупространства, J - оператор преобразования:

$J\left[\hat{u}\right]=\Lambda^{-1}\ \Gamma^{-1}\left[\hat{u}\right]$.

При этом $\Lambda\equiv\Lambda_n\cdot...\cdot\Lambda_1$, а для операторов Γ и Γ^{-1} получены выражения:

$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1,$

$$\Gamma_i [f] = \theta (y - l_0) \left(H + \frac{\partial}{\partial y} \right) f (x, y) - \theta (y - l_0) \left(H - \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathrm{X}_i f (x, y + 2l_i),$$

$$X_{\ i} = (\ E - K_i) (\ E + K_i)^{-1} \, i = 1, ..., n,$$

$$\Gamma_{\ i}^{-1} [g] = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{H\varepsilon} \cdot \frac{P_{j,i} (\varepsilon)}{j!} g (x, y + 2lj + \varepsilon) \, d\varepsilon.$$

Здесь $P_{\ j,i} (\varepsilon)$ - полином степени j с матричными коэффициентами. Для определения $P_{\ j,i} (\varepsilon)$ имеем рекуррентную формулу:

$$\left(\ H - \frac{d}{d\varepsilon} \right)\ X_{\ i}\ P_{\ j,i} (\varepsilon) = \left(\ H - \frac{d}{d\varepsilon} \right)\ P_{\ j+\ 1,i} (\varepsilon), \qquad P_{\ 0,i} (\varepsilon) =\ E. \tag{22.1}$$

$P_{\ j,i} (0) =\ X_{\ i}^{\ j}$. Заметим, что в том случае, когда матрицы H и X_i коммутируют для полинома $P_{\ j,i} (\varepsilon)$ получается явная формула:

$$P_{\ j,i} (\varepsilon) = L_j (2H\varepsilon) \cdot\ X_i^j,$$

где $L_j (\tau) -$ полином Лежандра [4].

5.Задача Дирихле для кусочно-однородного шара. Кусочно- однородный шар B_n^+ определим равенством:

$B_n^+ = \bigcup\limits_{j=0}^{n} B_j, B_j = \{ x : r_{j+1} < \|x\| < r_j \}, j = 0, ..., n,$

где $r_0, r_1, r_2, ..., \ r_n, r_{n+1}$ - точки на [0,1] , такие, что

$1 = r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n > r_{n+1} = 0$; $\frac{r_i}{r_0} \le \frac{r_{i+1}}{r_i}, i = 1, .., n - 1$.

Рассмотрим сепаратную систему уравнений Лапласа

$$\Delta u_i = 0, x \in B_{i-1}, i = 1, ..., n + 1$$

с граничным условием

$$u_1 (\eta) = \hat{u} (\eta), \eta \in S_0$$

с условиями сопряжения сферах $S_i = \{\xi : \ \|\xi\| = r_i\}$; $i = 1, .., n$:

$$M_{\ j} u_j(\xi) = u_{j+1}(\xi)\ ,$$
$$K_i L_{\frac{m-2}{2}}[u_j(\xi)] = L_{\frac{m-2}{2}}[u_{j+1}(\xi)]\ ,\ \xi \in S_i$$

где $\hat{u}(\eta)$ - след на сфере $\eta \in S_0$ функции $\hat{u} = \hat{u}(\eta)$ гармонической из класса $H_2^{\alpha}(B_0)$, $\alpha \geq 2$, оператор $L_{\frac{m-2}{2}}$ имеет вид:

$$L_{\frac{m-2}{2}} = \frac{m-2}{2} + \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

Непосредственная проверка показывает, что решение $u = u(x)$ поставленной задачи существует, единственно, принадлежит классу $H^{\alpha}(B_n^+)$,

$$u(x, y) = \int\limits_{S_0} J[P(x, \xi)] \cdot\ \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

где $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \chi(B_{k-1})\ u_k(x)$, $\chi(B_{k-1})$ - характеристическая функция множества B_{k-1} , $P(x, \xi)$ - ядро Пуассона для единичного шара. Оператор преобразования $J : \hat{u} \to u$ имеет вид:

$$J[\hat{u}] = \Lambda^{-1}\Gamma^{-1}[\hat{u}], \tag{22.2}$$

где
$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot \ldots \cdot \Gamma_1$, $\Gamma^{-1} = \Gamma_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \Gamma_n^{-1}$, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot \ldots \cdot \Lambda_1$, $\Lambda^{-1} = \Lambda_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \Lambda_n^{-1}$
$\Gamma_i[f] = f(x) +\ X_i r_i^{m-2} f\left(r_i^2 x\right)$,

$$X_i = (M_i - K_i)(M_i + K_i)^{-1}, i = 1, ..., n\ ,$$

Γ_i^{-1} - оператор, обратный к оператору Γ_i :

$$\Gamma_i^{-1}[g] = \sum_{k=0}^{\infty}\ X_i^k g\left(r_i^{2k} x\right).$$

Определим оператор сглаживания Λ_i относительно сферы S_i :
$\Lambda_i = \chi(B_{i,0})\ M_{\ i}^{-1}\left(K_i + \dfrac{E - K_i}{2} S_{\ i}\right) + \chi(B_{n+1,i})\, \mathrm{M}_{\mathrm{i}}^{-1} \dfrac{\mathrm{E} + K_i}{2}$,
S_i - инверсия относительно сферы $S_{\ i}$:

$$S_i[u] = \frac{r_i^{m-2}}{\|x\|^{m-2}} u\left(\frac{r_i^2}{\|x\|} x\right).$$

$\chi(B_{i,0})$ - характеристическая функция для шарового слоя $B_{i,0} = \{x : r_i < \|x\| < r_0\}$, $\chi(B_{n+1,i})$ - характеристическая функция для шара $B_{n+1,i} = \{x : \|x\| < r_i\}$, соответственно.

Оператор Λ_i^{-1} , обратный к Λ_i , имеет вид:

$$\Lambda_i^{-1} = \chi(B_{i,0}) K_i^{-1} (E - K_i S_i) M_i + \chi(B_{n+1,i}) 2 (E + K_i)^{-1} M_i. \quad (22.3)$$

При этом

$$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1, \Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1.$$

6. Четвертая краевая задача в шаре. Рассмотрим сепаратную систему уравнений Лапласа

$$\Delta u_i = 0, x \in B_{i-1}, i = 1, ..., n+1$$

с граничным условием

$$\left(\mathrm{H} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{n}}\right) u_1(\eta) = \hat{u}(\eta), \eta \in S_0$$

с условиями сопряжения сферах $S_i = \{\xi : \ \|\xi\| = r_i\}$; $i = 1, .., n$:

$$\begin{aligned} &M_j u_j(\xi) = u_{j+1}(\xi) , \\ &K_i L_{\frac{m-2}{2}} [u_j(\xi)] = L_{\frac{m-2}{2}} [u_{j+1}(\xi)] , \ \xi \in S_i \end{aligned}$$

где $\hat{u}(\eta)$ - след на сфере $\eta \in S_0$ функции $\hat{u} = \hat{u}(\eta)$ гармонической из класса $H_2^{\alpha}(B_0)$, $\alpha \geq 2$. Непосредственная проверка показывает, что решение $u = u(x)$ поставленной задачи существует, единственно, принадлежит классу $H^{\alpha}(B_n^{+})$, $\alpha \geq 2$ и

$$u(x,y) = \int\limits_{S_0} J[P(x,\xi)] \ \hat{u}(\xi) \, d\xi,$$

где $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \chi(B_{k-1}) \ u_k(x)$, $\chi(B_{k-1})$ - характеристическая функция множества B_{k-1} , $P(x,\xi)$ - ядро Пуассона для единичного шара. Оператор преобразования $J : \hat{u} \to u$ имеет вид: $J[\hat{u}] = \Lambda^{-1}\Gamma^{-1}[\hat{u}]$,

где

$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, $\Gamma^{-1} = \Gamma_1^{-1} \cdot ... \cdot \Gamma_n^{-1}$, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1$, $\Lambda^{-1} = \Lambda_1^{-1} \cdot ... \cdot \Lambda_n^{-1}$

$\Gamma_i[f] = f(x) + X_i r_i^{m-2} f(r_i^2 x)$, $\qquad X_i = (M_i - K_i)(M_i + K_i)^{-1}, i = 1, ..., n$,

Γ_i^{-1} - оператор, обратный к оператору Γ_i :

$$\Gamma_i^{-1}[g] = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon^{H-\ E} \frac{P_{j,i}(\ln\varepsilon)}{j!} g\left(\varepsilon \mathrm{r}_{\mathrm{i}}^{2k} x\right) d\varepsilon,$$

Многочлены $P_{j,i}$ определены выше формулой (23.23). Определим оператор сглаживания Λ_i относительно сферы S_i :

$\Lambda_i = \chi(B_{i,0})\ \ M\ _i^{-1}\left(K_i + \dfrac{E-K_i}{2} S_{\mathrm{i}}\right) + \chi(B_{n+1,i})\ \ M_i^{-1} \dfrac{\mathrm{E}+K_i}{2}$,

S_i - инверсия относительно сферы $S\ _i$: $S_i[u] = \frac{r_i^{m-2}}{\|x\|^{m-2}} u\left(\frac{r_i^2}{\|x\|} x\right)$.

$\chi(B_{i,0})$ - характеристическая функция для шарового слоя $B_{i,0} = \{\, x : r_i < \|x\| < r_0 \}$, $\chi(B_{n+1,i})$ - характеристическая функция для шара $B_{n+1,i} = \{\, x : \|x\| < r_i \}$, соответственно. Оператор Λ_i^{-1} , обратный к Λ_i , имеет вид:

$$\Lambda_i^{-1} = \chi(B_{i,0}) K_i^{-1} (\ E - \ X\ _i S_i) M_i + \chi(B_{n+1,i})\, 2\, (\ E + \ K\ _i)^{-1} M_i.$$

При этом

$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot \ldots \cdot \Gamma_1$, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot \ldots \cdot \Lambda_1$,

7. Обратная краевая задача Дирихле для кусочно-однородного шара. Обозначим через $P\ _r$ оператор $P\ _r : f(x) \to u(\xi)$, восстанавливающий граничные значения $u(\xi), \|\xi\| = 1$ функции $u(\ x)$ гармонической в шаре $\|x\| < 1$, по заданным значениям $f(x)$ этой функции на сфере $\|x\| = \ r, 0 < \ r < \ 1.$. Постановку и методы решения обратной краевой задачи Дирихле можно найти, например, в [3]. Обратная краевая задача Дирихле для кусочно-однородного шара состоит в определении $\hat{u}(\xi), \|\xi\| = 1$ по известным значениям $u\ _j(x)$ на сфере

$$\|x\| = \ r, r\ _j < \ r < \ r\ _{j-1}.$$

Выразим оператор $P\ _{r,j} : u_j(x) \to \hat{u}(\xi)$ через модельный оператор $P\ _r$. Из формулы (23.24) следует, что

$$P\ _{r,n+\ 1} = \ P\ _r \cdot \Gamma.$$

Считая определенным оператор $P\ _{r,j+\ 1}$, зададим оператор $P\ _{r,j}$ формулой:

$$P\ _{r,j} = \Lambda\ _j^{-1} P_{r,j+1},$$

в которой оператор $\Lambda\ _j^{-1}$ действует по правилу (23.23).

Глава 23

Операторы преобразования в задаче о структуре электромагнитного поля в многослойной среде

Задача о структуре электромагнитного поля в многослойной электропроводной среде [] состоит в определении скалярного потенциала $\varphi\,(t,x)$ и векторного потенциала $A\,(\,t,x)$ в $Q_T=(0,T)\times I^+_n$. Скалярный потенциал $\varphi\,(t,x)\,,$

$$\varphi\,(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\theta\,(x-l_{j-1})\;\theta\,(l_j-x)\;\varphi_j\,(t,x)\;+\theta\,(x-l_n)\;\varphi_{n+1}\,(\,t,x)\,,$$

является ограниченным на множестве I^+_n :

$$I_n^+=\left\{x:\;x\in\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1},l_j)\,,\;\;l_0=0,\;\;l_{n+1}=\infty,\;\;l_j<l_{j+1},\;\;j=1,...,\;n\right\}.$$

решением сепаратной системы $(n{+}1)$ уравнений гиперболического типа:

$$\begin{gathered}\left(\frac{4\pi\mu_j\sigma_j}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\varepsilon_j\mu_j}{A^2}\frac{\partial}{\partial\,t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi_j\,(t,x)=\frac{4\pi}{\varepsilon_j}\rho_j\,(\,t,x)\,,\\(t,x)\in Q_T,\;\;j=1,...,n+1\end{gathered}\tag{23.1}$$

по нулевым начальным условиям

$$\begin{aligned}&\varphi_j\left(t,x\right)|_{t=0}=0,\\&\frac{\partial}{\partial\ t}\varphi_j\ \left(t,x\right)\big|_{t=0}=0,x\in I_n\end{aligned}\tag{23.2}$$

по граничному условию

$$\varphi_1=f_0\left(t\right)\tag{23.3}$$

и условиям сопряжения $x=l_k,\ \ k=1\ ,...,n$

$$\varphi_k=\varphi\ _{k+\ 1}\tag{23.4}$$

$$\lambda_k\frac{\partial}{\partial x}\varphi_k=\lambda_{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{k+1};$$

Преобразуем уравнение (23.26) к виду

$$\begin{aligned}&\left(\ a\ _j^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+b_j\frac{\partial}{\partial\ t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi_j\left(t,x\right)=\frac{4\pi}{\varepsilon_j}\rho_j\left(\ t,x\right),\\&b_j=\frac{\varepsilon_j}{4\pi\sigma_j},a_j^2=\frac{c^2}{4\pi\mu_j\sigma_j}\\&(t,x)\in Q_T,\ \ j=1,...,n+1\end{aligned}\tag{23.5}$$

В образах Лапласа задача (23.26)-(23.29) принимает вид:

$$\begin{aligned}&\left(\ a\ _j^2\ p\ ^2+b_jp-\frac{d^2}{dx^2}\right)\Phi\ _j\left(p,x\right)=\frac{4\pi}{\varepsilon_j}\ \ P_j\left(\ p,x\right)\\&j=1,...,n+1\end{aligned}\tag{23.6}$$

по граничному условию

$$\Phi_1=F_0\left(p\right)\tag{23.7}$$

и условиям сопряжения $x=l_k,\ \ k=1\ ,...,n$

$$\Phi_k=\Phi\ _{k+\ 1}$$

$$\lambda_k\frac{d}{dx}{}_k\Phi=\lambda_{k+1}\frac{d}{dx}\Phi_{k+1}.\tag{23.8}$$

Решение задачи (23.31)-(23.33) имеет вид:

$$\begin{aligned}&\Phi_j\left(p,x\right)=\sum_{m=1}^{n+1}\frac{4\pi}{\varepsilon_m}\int\limits_{l_{m-1}}^{l_m}H_{j,m}^*\left(p,x,\xi\right)\ \ P_m\left(\ p,\!\xi\right)d\xi+\ W_j^*\left(p,x\right)\ F_0\left(p\right),\\&j=1,...,n+1,\end{aligned}\tag{23.9}$$

где p- комплексный параметр, $H^*_{j,s}$ - образы Лапласа функций влияния $W^*_j(p,x)$ - образы Лапласа функций Грина [2]. Для функций $H^*_{j,s}$ справедливы непосредственно проверяемые формулы:

при $k < s$

$$\begin{aligned}
&H^*_{k,s} = \varphi_k(p,x)\cdot\psi_s(p,\xi)\tfrac{1}{\omega_s(p)},\\
&l_{k-1} < x < l_k, l_{s-1} < \xi < l_s;\\
&k,\ \ s = 1, ..., n+1,
\end{aligned}$$

при $k > s$

$$\begin{aligned}
&H^*_{k,s} = \psi_k(p,x).\varphi_s(p,\xi)\tfrac{1}{\omega_s(p)},\\
&l_{k-1} < x < l_k, l_{s-1} < \xi < l_s;\\
&k,\ \ s = 1, ..., n+1,
\end{aligned}$$

при $k = s$

$$H^*_{k,s} = \begin{cases} \varphi_k(p,x)\psi_s(p,\xi)\tfrac{1}{\omega_s(p)},\\ l_{k-1} < x < \xi < l_k,\\ \psi_k(p,x)\cdot\varphi_s(p,\xi)\tfrac{1}{\omega_s(p)},\\ l_{k-1} < \xi < x < l_k,\ \ k = 1, ...,\ n+1. \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения: $\varphi_s(p,x)$, $s = 1, ..., n+1$ решение сепаратной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(q_s^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi_s(p,x) = 0$$

$$q_s^2 = a_s^2 p^2 + b_s p,$$

причем,

$$\varphi_1(p,x) = \frac{shq_1 x}{q_1},$$

и компоненты $\varphi_s(p,x)$ функции влияния определяются однозначно по условиям сопряжения $x = l_s$, $s = 1, ..., n$

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s$$

$$\lambda_{s+1}\frac{d}{dx}\varphi_{s+1} = \lambda_s\frac{d}{dx}\varphi_s.$$

Аналогично, $\psi_{\ k}(p,x)$ - решение сепаратной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(q_{\ k}^{\ 2}-\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi_k(p,x)=0.$$

При этом $\psi_{\ n+\ 1}(p,x)=e^{-q_{n+1}x}$, а функции $\psi_{\ k}(p,x)$ определяются при помощи условий сопряжения в точках $x=l_k,\ \ k=1\ ,...,n$:

$$\psi_k=\psi_{\ k+\ 1}$$

$$\lambda_k\frac{d}{dx}_k\psi_k=\lambda_{k+1}\frac{d}{dx}\psi_{k+1}.$$

Далее считаем выполненными условия неограниченной разрешимости задачи (23.31)-(23.33)

$$\omega_{\ s}(p)\neq 0, Rep=\sigma>\sigma_0; s=1,...,n+1, \qquad (23.10)$$

где

$$\omega_{\ s}(p)=\det\begin{pmatrix}\varphi_s(p,x) & \psi_s(p,x)\\ \varphi_s^{/}(p,x) & \psi_s^{/}(p,x)\end{pmatrix}.$$

Преобразуем выражения для функций влияния $H^*{}_{ks}$. Пусть

$$\psi_k=\alpha_{1k}(p)\,e^{-q_kx}+\alpha_{2k}(p)\,e^{-q_k(2l_k-x)}, k=1,...,n$$

$$\varphi_s=\beta_{1s}(p)\,\frac{shq_s\xi}{q_s}+\beta_{2s}(p)\,\frac{shq_s\,(2l_s-\xi)}{q_s}, s=1,...,n$$

Определим образы Лапласа модельных функций влияния $\Lambda^*{}_{ks}$ формулами

при $k<s$

$$\begin{array}{l}\Lambda^*_{k,s}=\frac{shq_kx}{q_k}\cdot e^{-q_s\xi},\\ l_{k-1}<x<l_k, l_{s-1}<\xi<l_s;\\ k,\ \ s=1\ ,....,n+\ 1,\end{array}$$

при $k>s$

$$\begin{array}{l}\Lambda^*_{k,s} = e^{-q_k x}\frac{shq_s\xi}{q_s}\,,\\ l_{k-1} < x < l_k, l_{s-1} < \xi < l_s;\\ k,\ \ s = 1\ ,....,n +\ 1,\end{array}$$

при $k = s$

$$\Lambda^*_{k,s} = \left\{\begin{array}{l}\frac{shq_k x}{q_k}e^{-q_s\xi}, l_{k-1} < x < \xi < l_k,\\ e^{-q_k x}\frac{shq_s\xi}{q_s}, l_{k-1} < \xi < x < l_k,\\ k = 1, ...,\ \ n +\ 1.\end{array}\right.$$

Из определения функций влияния H^*_{ks} следуют равенства:

$$\begin{array}{l}H^*{}_{ks}\left(p, x\xi\right) = \frac{1}{\omega_s}\alpha_{1k}\beta_{1s}\Lambda^*_{ks}\left(p, x, \xi\right) + \frac{1}{\omega_s}\alpha_{1k}\beta_{2s}\Lambda^*_{ks}\left(p, x, 2l_s - \xi\right) +\\ +\frac{1}{\omega_s}\alpha_{2k}\beta_{1s}\Lambda^*_{ks}\left(p, 2l_k - x, \xi\right) + \frac{1}{\omega_s}\alpha_{2k}\beta_{2s}\Lambda^*_{ks}\left(p, 2l_k - x, 2l_s - \xi\right).\end{array} \tag{23.11}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что функции Грина W^*_k имеют вид:

$$\begin{array}{c}W^*{}_k =\ \psi_k\left(p, x\right)\frac{1}{\psi_1(p,l_0)},\\ l_{k-1} < x < l_k; k = 1\ ,....,n +\ 1.\end{array}$$

Определяя модельные функции влияния равенствами:

$$V^*_k\left(p, x\right) = \frac{1}{q\ _k}\ e^{\ -q\ _k x},$$

с помощью разложения

$$\psi_k = \alpha_{1k}\left(p\right)e^{-q_k x} + \alpha_{2k}\left(p\right)e^{-q_k(2l_k - x)}, k = 1, ..., n,$$

устанавливаем представления для функций влияния W^*_k :

$$\begin{array}{l}W^*{}_k = \frac{1}{\psi_1(\ p,l\ _0)}\alpha_{1k}\left(p\right)V^*_k\left(p, x\right) + \frac{1}{\psi_1(\ p,l\ _0)}\alpha_{2k}\left(p\right)V^*_k\left(p, 2l_k - x\right)\ ,\\ l_{k-1} < x < l_k; k = 1\ ,....,n +\ 1,\end{array} \tag{23.12}$$

Определим серию операторов преобразования $P^{++}_{ks}, P^{+-}_{ks}, P^{-+}_{ks}, P^{--}_{ks}$ по правилам:

$$P^{++}_{ks}:\ p_s\left(t, x\right) \to p^{++}_{ks}\left(t, x\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\omega_s}\alpha_{1k}\beta_{1s}P_s\left(p, x\right)\right)\ ,$$

$$P_{ks}^{+-}: p_s\left(t,x\right) \to p_{ks}^{+-}\left(t,x\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\omega_s}\alpha_{1k}\beta_{2s}P_s\left(p,x\right)\right),$$

$$P_{ks}^{-+}: p_s\left(t,x\right) \to p_{ks}^{-+}\left(t,x\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\omega_s}\alpha_{2k}\beta_{1s}P_s\left(p,x\right)\right),$$

$$P_{ks}^{--}: p_s\left(t,x\right) \to p_{ks}^{--}\left(t,x\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\omega_s}\alpha_{2k}\beta_{2s}P_s\left(p,x\right)\right),$$

$$P_k^{+}: f_0\left(t\right) \to f_k^{+}\left(t\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\psi_1\left(p, l_0\right)}\alpha_{1k}\left(p\right)F_0\left(p\right)\right),$$

$$P_k^{-}: f_0\left(t\right) \to f_k^{-}\left(t\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{\psi_1\left(p, l_0\right)}\alpha_{2k}\left(p\right)F_0\left(p\right)\right).$$

Здесь L^{-1} - обратное преобразование Лапласа.

Учитывая, что функции $u_j^*\left(p,x\right)$ определены корректно и являются изображениями Лапласа в силу условий неограниченной разрешимости, возвращаясь к оригиналам, с учетом определения операторов преобразования, получим формулу для неизвестной структуры электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}
&\varphi_j\left(t,x\right) = \sum_{m=1}^{n+1}\int_0^t \frac{4\pi}{\varepsilon_m}\int\limits_{l_{m-1}}^{l_m} \Lambda_{jm}\left(\tau,x,\xi\right) p_{jm}^{++}\left(t-\tau,\xi\right)d\xi + \\
&+\sum_{m=1}^{n+1}\int_0^t \frac{4\pi}{\varepsilon_m}\int\limits_{l_{m-1}}^{l_m} \Lambda_{jm}\left(\tau,x,2l_m-\xi\right) p_{jm}^{+-}\left(t-\tau,\xi\right)d\xi + \\
&+\sum_{m=1}^{n+1}\int_0^t \frac{4\pi}{\varepsilon_m}\int\limits_{l_{m-1}}^{l_m} \Lambda_{jm}\left(\tau,2l_j-x,\xi\right) p_{jm}^{-+}\left(t-\tau,\xi\right)d\xi + \\
&+\sum_{m=1}^{n+1}\int_0^t \frac{4\pi}{\varepsilon_m}\int\limits_{l_{m-1}}^{l_m} \Lambda_{jm}\left(\tau,2l_j-x,2l_m-\xi\right) p_{jm}^{--}\left(t-\tau,\xi\right)d\xi + \\
&+\int_0^t V_j\left(\tau,x\right) f_k^{+}\left(t-\tau\right)d\tau + \int_0^t V_j\left(\tau,2l_j-x\right) f_k^{-}\left(t-\tau\right)d\tau\ ; \\
&j = 1,...,n+1.
\end{aligned} \tag{23.13}$$

Замечание. Формулы (23.38) значительно упрощаются в том случае когда отношения $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$ - постоянны. Соответствующие компоненты функций влияния и функций Грина имеют вид:

$$\Lambda_{km}(t,x,\xi) = \frac{1}{2}e^{-\frac{b_k}{2a_k^2}t}\left(I_0\left(\frac{b_k}{2a_k^2}\sqrt{t^2-\left(a_kx-a_m\xi\right)^2}\right)\theta\left(t-\left|a_kx-a_m\xi\right|\right)-\right.$$
$$\left.-I_0\left(\frac{b_k}{2a_k^2}\sqrt{t^2-\left(a_kx+a_m\xi\right)^2}\right)\theta\left(t-\left(a_kx+a_m\xi\right)\right)\right);$$

$$k,m = 1,...,n+1;$$

$$V_k(t,x) = e^{-\frac{b_k}{2a_k^2}t}I_0\left(\frac{b_k}{2a_k^2}\sqrt{t^2-a_k^2x^2}\right)\theta\left(t-a_kx\right),$$

$$k = 1,...,n+1.$$

Глава 24

Краевые задачи для функций, бигармонических в кусочно-однородном полупространстве

24.1 Краевые задачи для бигармонических функций в кусочно-однородном полупространстве с одной гиперплоскостью сопряжения.

Пусть функция $\tilde{u} = \tilde{u}\,(x, y)$ гармоническая в полупространстве $E_+^{m+1} = \{\ (x, y) : x \in E^m, y > 0\ \}$, т.е.

$$\Delta\tilde{u} = 0, \quad (x, y) \in E_+^{m+1} \tag{24.1}$$

и пусть выполняются условия: $\tilde{u}, y\tilde{u} \in H^\alpha\left(E_+^{m+1}\right)$. Рассмотрим сепаратную систему бигармонических уравнений:

$$\begin{array}{l} \Delta^2 u_0 = 0, (x, y) \in E^m \times (-\infty, 0)\ , \\ \Delta^2 u_1 = 0, (x, y) \in E^m \times (0, \infty)\,, \end{array} \tag{24.2}$$

с неоднородными условиями сопряжения:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,0)=u_1(x,0), \quad k\tfrac{\partial}{\partial y}u_0(x,0)=\tfrac{\partial}{\partial y}u_1(x,0)\ ,\\
&p\Delta u_0(x,0)=\Delta u_1(x,0)+\tilde{u}(x,0), \quad q\tfrac{\partial}{\partial y}u_0(x,0)=\tfrac{\partial}{\partial y}u_1(x,0)\ .
\end{aligned}
\tag{24.3}
$$

Теорема 24.1 . *Решение* $u=\theta(-y)\ u_0+\theta(y)\ u_1$ *задачи* (24.2) – (24.3) *существует, единственно и может быть найдено при помощи оператора преобразования:* $u=J[\tilde{u}]$,

$$
\begin{aligned}
&u_0=\tfrac{1}{2(k+1)}\tfrac{k+q}{p+q}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,-y+\varepsilon)\,d\varepsilon-\tfrac{y}{2(p+q)}\tilde{u}(x,-y)\ ,\\
&u_1=\tfrac{1}{2(k+1)}\tfrac{k+q}{p+q}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,y+\varepsilon)\,d\varepsilon-\tfrac{yq}{2(p+q)}\tilde{u}(x,y)\ .
\end{aligned}
\tag{24.4}
$$

Доказательство. Из формулы

$$
\int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,y+\varepsilon)\,d\varepsilon=\int\limits_y^\infty \tilde{u}(x,\beta)\,d\beta
$$

следует, что интеграл

$$
\int\limits_0^\infty \tilde{u}(x,y+\varepsilon)\,d\varepsilon
$$

представляет функцию, гармоническую в E_+^{m+1}. Функция $y\tilde{u}(x,y)$ - бигармоническая ввиду равенств:

$$
\Delta^2[y\tilde{u}(x,y)]=\Delta\left[2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}+y\Delta\tilde{u}\right]=\Delta\left[2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}\right]=2\frac{\partial}{\partial y}\Delta[\tilde{u}]=0.
$$

Второе из условий сопряжения (24.3) выполнено в силу равенств:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial y}u_0=\tfrac{1}{2(k+1)}\tfrac{k+q}{p+q}\tilde{u}(x,-y)-\tfrac{1}{2(p+q)}\tilde{u}(x,-y)+\tfrac{y}{2(p+q)}\tfrac{\partial}{\partial y}[\tilde{u}](x,-y)\ ,\\
&\tfrac{\partial}{\partial y}u_1=-\tfrac{q}{2(k+1)}\tfrac{k+q}{p+q}\tilde{u}(x,y)+\tfrac{q}{2(p+q)}\tilde{u}(x,y)+\tfrac{yq}{2(p+q)}\tfrac{\partial}{\partial y}[\tilde{u}](x,y)\ .
\end{aligned}
$$

Аналогично доказываются и остальные условия сопряжения. Осталось заметить, что рассматриваемая задача (24.1)-(24.3) имеет единственное решение, т.к. соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

24.2 Краевые задачи для бигармонических функций в однородном полупространстве.

Рассмотрим задачу о нахождении решения бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0, (x, y) \in E_+^{m+1}, \tag{24.5}$$

удовлетворяющего краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \qquad \Gamma[\Delta u](x, 0) = \tilde{u}(x, 0), \tag{24.6}$$

Γ - произвольный граничный оператор, $\tilde{u}(x, 0)$ – след на гиперплоскости $y = 0$ функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$, гармонической в E_+^{m+1} из класса $H_2^\alpha\left(E_+^{m+1}\right)$, $\alpha \geq 2$.

Теорема 24.2 . *Пусть* Γ *- произвольный граничный оператор, для которого краевая задача:*

$$\Delta v(x, y) = 0, \qquad \Gamma[v](x, 0) = \tilde{u}(x, 0) \tag{24.7}$$

имеет единственное решение $v = v(x, y)$ *в классе* $H_2^\alpha\left(E_+^{m+1}\right)$ *, тогда краевая задача (24.5)-(24.6) имеет единственное решение* u *в классе* $H_2^{\alpha+2}\left(E_+^{m+1}\right)$ *. При этом выполняется представление:*

$$u = -\frac{y}{2}\int_0^\infty v(x, y+\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{24.8}$$

Лемма 24.1 . *Пусть* f *- функция, гармоническая в полупространстве* E_+^{m+1}*. Решение уравнения Пуассона*

$$\Delta v = f(x, y),\ (x, y) \in E_+^{m+1} f \in H_2^{\alpha-2}\left(E_+^{m+1}\right), \tag{24.9}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$v(x, 0) = g(x),\ g \in H_2^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(E^m\right), \tag{24.10}$$

имеет вид:

$$v = -\frac{1}{2} y \cdot \int_0^{\infty} f\,(\,x, y + \varepsilon)\, d\varepsilon + \int_{E^m} P\,(x - \eta, y)\ g\,(\eta)\, d\eta, \qquad (24.11)$$

причем $v \in H_2^{\alpha}\left(E_+^{m+1}\right)$, $P\,(x-\eta, y)$ *- ядро Пуассона для полупространства.*

24.3 Краевые задачи для бигармонических функций в кусочно-однородном полупространстве.

В кусочно-однородном полупространстве $E_{n,+}^{m+1}$ рассмотрим задачу определения функции $u = u\,(x, y)$ из класса $u \in H_2^{\alpha}\left(E_{n,+}^{m+1}\right)$, $\alpha \geq 4$:

$$u\,(x, y) = \sum_{k=1}^{n+1} \chi\,(B_k)\ \ u_k\,(x, y)\,,$$

где $\chi\,(B_k)$ - характеристическая функция множества B_k,

$$B_k = \{\ (x, y) : x \in E^m, l_{k-1} < y < l_k\ \}\,,$$

удовлетворяющей системе сепаратных бигармонических уравнений:

$$\Delta^2 u_i = 0, \quad\ (x, y) \in B_i\ ,\ i = 1, ..., n+1 \qquad (24.12)$$

с граничными условиями:

$$u_1\,(x, l_0) = f\,(x)\,, f \in H^{\alpha - \frac{1}{2}}\,(E^m)\ \ , \Delta u_1\,(\eta) = g\,(\eta)\,, g \in H^{\alpha - \frac{5}{2}}\,(E^m) \qquad (24.13)$$

и условиями сопряжения на гиперплоскостях $y = l_i$:

$$\begin{aligned} &u_i\,(x, l_i) = u_{i+1}\,(x, l_i)\,, \quad k_i \frac{\partial}{\partial y}\left[u_i\,(x, l_i)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[u_{i+1}\,(x, l_i)\right]\ , \\ &p_i \Delta u_i\,(x, l_i) = \Delta u_{i+1}\,(x, l_i)\,, \quad\ m_i \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta u_i\,(x, l_i)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta u_{i+1}\,(x, l_i)\right]\ ; i = 1, ..., n. \end{aligned} \qquad (24.14)$$

Для решения поставленной задачи применим метод операторов преобразования. Заметим, что функции Δu_i являются решениями задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном полупространстве $E_{n,+}^{m+1}$:

$$\Delta\left(\Delta u_i\right) = 0, (x, y) \in B_i,\ i = 1, ..., n+1 \tag{24.15}$$

с граничным условием

$$\Delta u_1\left(x, 0\right) = g\left(x\right) \tag{24.16}$$

и условиями сопряжения

$$p_i \Delta u_i\left(x, l_i\right) = \Delta u_{i+1}\left(x, l_i\right)\ , \qquad m_i \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta u_i\left(x, l_i\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta u_{i+1}\left(x, l_i\right)\right]\ . \tag{24.17}$$

Применим к кусочно-гармонической, функции $\Delta u = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \chi\left(B_k\right) \cdot \Delta u_k\left(x, y\right)$ оператор преобразования J, порождаемый краевой задачей (24.16)-(24.17) (см.[5]). По формуле Пуассона для полупространства имеем:

$$J^{-1}\left[\Delta u\right]\ (x, y) = \int\limits_{E^m} P\left(x - \eta, y\right)\ g\left(\eta\right) d\eta, \tag{24.18}$$

где $P\left(x-\eta, y\right)$ – ядро Пуассона для полупространства. Из формулы (24.18) получим:

$$\Delta u\left(x, y\right) = J\left[\int\limits_{E^m}\left[P\left(x - \eta, y\right)\right]\ g\left(\eta\right) d\eta\right]. \tag{24.19}$$

В итоге для кусочно-гармонической функции Δu имеем краевую задачу о решении сепаратной системы уравнений Пуассона

$$\Delta u\left(x, y\right) = h\left(x, y\right), (x, y) \in E_{n,+}^{m+1}, \tag{24.20}$$

$$h\left(x, y\right) = J\left[\int\limits_{E^m}\left[P\left(x - \eta, y\right)\right]\ g\left(\eta\right) d\eta\right] \tag{24.21}$$

с краевым условием

$$u_1(x, l_0) = f(x), \tag{24.22}$$

и условиями сопряжения

$$u_i(x, l_i) = u_{i+1}(x, l_i), \quad k_i \frac{\partial}{\partial y}[u_i(x, l_i)] = \frac{\partial}{\partial y}[u_{i+1}(x, l_i)] \ , \ i = 1, .., n. \tag{24.23}$$

Для нахождения неизвестной кусочно-гармонической функции u применим оператор преобразования Y, порождаемый краевой задачей (24.22)-(24.23),см. [5].

Пусть функция v - решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta v = Y^{-1}[h(x, y)] \ , x \in E^m, y > 0,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$v(x, 0) = f(x), x \in E^m.$$

Из леммы 24.1 следует, что

$$v = \int\limits_{E^m} P(x - \eta, y) f(\eta) d\eta - \frac{y}{2} \int\limits_0^\infty Y^{-1}[h(x, y + \varepsilon)] d\varepsilon.$$

Учитывая, что операторы Y, Δ коммутируют, для неизвестного решения u получим формулу:

$$u = Y\left[\int\limits_{E^m} P(x - \eta, y) f(\eta) d\eta\right] -$$

$$-Y\left[\frac{y}{2} \int\limits_0^\infty Y^{-1}\left[J\left[\int\limits_{E^m} [P(x - \eta, y + \varepsilon)] \ g(\eta) d\eta\right]\right] d\varepsilon\right]. \tag{24.22}$$

Замечание. В случае, когда выполнены условия: $p_i = 1, k_i = m_i, i = 1, .., n$, операторы J, Y совпадают, и поэтому формула (24.22) принимает особенно простой вид:

$$u = Y\left[\int\limits_{E^m} P\left(x-\eta, y\right) f\left(\eta\right) d\eta - \frac{y}{2}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{E^m} \left[P\left(x-\eta, y+\varepsilon\right)\right]\ g\left(\eta\right) d\eta\right) d\varepsilon\right].$$

Глава 25

Операторный метод для функций кусочно-гармонических в шаре

25.1 Краевые задачи для гармонических функций в шаре.

Пусть функция $\hat{u} = \hat{u}(x)$ гармонична в шаре $B_0 = \{\, x \in R^m : |x| < 1 \,\}$ и пусть $\hat{u} \in H_2^{\alpha}(B_0)$, $(\alpha \geq 2)$. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, x \in B_0$$

с граничными условиями

$$hu(\xi) + \frac{\partial}{\partial n} u(\xi) = \hat{u}(\xi) \ , \xi \in S_0,$$

где $h > 0$ постоянная, $\hat{u} = \hat{u}(\xi)$ - след функции $\hat{u} = \hat{u}(x)$ на гиперсфере S_0.

Решение $u = u(x)$ поставленной задачи существует, единственно и принадлежит классу $u \in H_2^{\alpha+1}(B_0) \quad (\alpha \geq 2)$ см. [11]. Для каждой гармонической в шаре функции $\hat{u} = \hat{u}(\xi)$ по правилу $L_h^{-1} : \hat{u} \to u$ определен оператор преобразования L_h^{-1} из H_2^{α} в $H_2^{\alpha+1}$. Имеем:

1) L_h^{-1} - оператор обратный к оператору $L_h = h + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + x_{\mathrm{m}} \frac{\partial}{\partial x_m}$,

2) на гиперсфере S_0 справедливо равенство: $L_h = h + \frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали,

3) для оператора преобразования L_h^{-1} справедлива формула (см. [10]):

$$L_h^{-1}[\hat{u}] = \int_0^1 \varepsilon^{h-1}\hat{u}(\varepsilon\, x)\, d\varepsilon.$$

Следовательно, решение третьей краевой задачи в шаре находим по формуле:

$$u = \int_{S_0} L_h^{-1}[P(x,\xi)]\ \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

где $P(x,\xi)$ - ядро Пуассона для шара.

Пусть функция $\hat{u} = \hat{u}(x)$ из класса $H_2^{\alpha}(B)$, $\alpha \geq 2$ гармонична в шаре $B = \{\, x \in R^m : |x| < 1 \,\}$ с границей S. Рассмотрим уравнение Лапласа в шаровом слое $D = \{x \in R^m : r_0 < |x| < 1\}$:

$$\Delta u = 0, x \in D,$$

с условиями Дирихле на его границе $\partial D = S \bigcup S_0$

$$u(\xi) = \hat{u}(\xi), \xi \in S, S = \{\, \xi \in R^m : |\xi| = 1 \,\},$$

$$u(\eta) = 0, \eta \in S_0, S_0 = \{\, \xi \in R^m : |\xi| = r_0 \,\},$$

где $\hat{u}(\xi)$ - след на гиперплоскости S функции $\hat{u} = \hat{u}(x)$. Из определения оператора преобразования J следует, что решение $u = u(x)$ существует, единственно и принадлежит классу $H_2^{\alpha}(D)$ (см. [11]), и выражается формулой:

$$u(x) = \int_{S_0} J[P(x,\xi)] \cdot\ \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

где $P(x,y)$ - ядро Пуассона для гипершара, J - оператор преобразования:

$$J[\hat{u}] = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (E - S) \cdot \Gamma^j[\hat{u}(x)],$$

здесь $\Gamma^j[u] = u\left(r_0^{2j} x\right)$, S - инверсия относительно гиперсферы S_0 :

$$S\left[u\right]=\frac{r_0^{m-2}}{\left|x\right|^{m-2}}u\left(\frac{r_0^2}{\left|x\right|}x\right).$$

Кусочно- однородный шар B_n^+ определим равенством:

$$B_n^+=\overset{n}{\underset{j=0}{U}}B_j,B_j=\left\{\,x:r_{j+1}<\left|x\right|<r_j\,\right\},j=0,...,n,$$

где $r_0,r_1,r_2,...,\ r_n,r_{n+1}$ - точки на [0,1], такие, что
$1=r_0>r_1>r_2>...>r_n>r_{n+1}=0\ ;\ \frac{r_i}{r_0}\le\frac{r_{i+1}}{r_i},i=1,..,n-1.$
Рассмотрим сепаратную систему уравнений Лапласа

$$\Delta u_i=0,x\in B_{i-1},i=1,...,n$$

с граничным условием

$$u_1\left(\eta\right)=\hat{u}\left(\eta\right),\eta\in S_0$$

с условиями сопряжения на гиперсферах:

$$\begin{array}{l}u_j\left(\xi\right)=u_{j+1}\left(\xi\right)\ ,\\ k_iL_{\frac{m-2}{2}}\left[u_j\left(\xi\right)\right]=L_{\frac{m-2}{2}}\left[u_{j+1}\left(\xi\right)\right]\ ,\ \xi\in S_i;\ S_i=\left\{\,\xi:\ \left|\xi\right|=r_i\,\right\}\ ;i=1,..,n,\end{array}$$

где $\hat{u}\left(\eta\right)$ - след на гиперсфере $\eta\in S_0$ функции $\hat{u}=\hat{u}\left(\eta\right)$ гармонической из класса $H_2^\alpha\left(B_0\right)\ ,\alpha\ge2$, оператор $L_{\frac{m-2}{2}}$ имеет вид:

$$L_{\frac{m-2}{2}}=\frac{m-2}{2}+\sum_{i=1}^{m}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение $u=u\left(x\right)$ поставленной задачи существует, единственно, принадлежит классу
$H^\alpha\left(B_n^+\right)\ ,\alpha\ge2$ и

$$u\left(x\right)=\int\limits_{S_0}J\left[P\left(x,\xi\right)\right]\cdot\ \hat{u}\left(\xi\right)d\xi,$$

где J - оператор преобразования $J:\hat{u}\to u,u\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\chi\left(B_{k-1}\right)\ u_k\left(x\right),$ $\chi\left(B_{k-1}\right)$ -характеристическая функция множества $B_{k-1},\ P\left(x,\xi\right)$ - ядро

Пуассона для единичного шара. Для оператора J справедливо представление

$$J[\hat{u}] = \Lambda^{-1} \cdot \Gamma^{-1}[\hat{u}],$$

где
$\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$, $\Gamma^{-1} = \Gamma_1^{-1} \cdot ... \cdot \Gamma_n^{-1}$, $\Lambda \equiv \Lambda_n \cdot ... \cdot \Lambda_1$, $\Lambda^{-1} = \Lambda_1^{-1} \cdot ... \cdot \Lambda_n^{-1}$

$$\Gamma_i[f] = f(x) + \frac{1-k_i}{1+k_i} r_i^{m-2} f\left(r_i^2 x\right)\ ,\ i = 1, ..., n\ ,$$

Γ^{-1} - оператор, обратный к оператору Γ :

$\Gamma^{-1}[g] = \sum\limits_{\|k\|=0}^{\infty} (-1)^{\|\mathrm{k}\|} h^k g\left(r^{2k} x\right),\ h^k = h_1^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h_n^{k_n}\ ,$

$$h_i = \frac{1-k_i}{1+k_i} r_i^{m-2}, r^{2k} = \prod_{i=1}^{n} r_i^{2k_i}.$$

Примем обозначения для шарового слоя $B_{i,0} = \{\, x : r_i < |x| < r_0 \}$ и для шара $B_{n+1,i} = \{\, x : |x| < r_i \}$. Определим оператор сглаживания L_i относительно гиперсферы S_i :

$$\Lambda_i = \chi(B_{i,0}) \left(k_i E + \frac{1-k_i}{2} S \right) + \chi(B_{n+1,i}) \frac{k_i+1}{2} E,$$

Оператор Λ_i^{-1}, обратный к Λ_i, имеет вид:

$$\Lambda_i^{-1} = \chi(B_{i,0}) \frac{1}{k_i} \left(E - \frac{1-k_i}{1+k_i} S \right) + \chi(B_{n+1,i}) \frac{2}{k_i+1} E.$$

Следствие 25.1. Выпишем в явном виде формулу Пуассона для кусочно однородного круга с одной окружностью сопряжения
$|z| = r; 0 < r < 1$:

$$u(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^j \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left[\frac{1-|z|^2 r^{4j}}{|\eta - z r^{2j}|^2} - \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{|z|^2} r^{4j+4}}{\left|\eta - \frac{z}{|z|^2} r^{2j+2}\right|^2} \right] u(\eta)\, d\eta, \\ \qquad r < |z| < 1; \\ \frac{2k}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^j \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{1-|z|^2 r^{4j}}{|\eta - z r^{2j}|^2} u(\eta)\, d\eta, \\ \qquad |z| < r. \end{cases}$$

25.2 Краевые задачи для бигармонических функций в шаре.

Лемма 25.1 . *Пусть f - функция, гармоническая в шаре $B_0 \subset R^m$. Решение уравнения Пуассона*

$$\Delta v = f\left(x\right), x \in B_0, f \in H_2^{\alpha-2}\left(B_0\right)\ , \alpha \geq 2,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$v\left(\eta\right) = g\left(\eta\right)\ , \eta \in S_0, g \in H_2^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(S_0\right)\ , \alpha \geq 2,$$

имеет вид:

$$v = \frac{1}{2}\left(\|\mathrm{x}\|^2 - 1\right) \cdot \int\limits_0^1 \varepsilon^{m-1} f\left(\varepsilon\, x\right) d\varepsilon + \int\limits_{S_0} P\left(x,\eta\right)\, g\left(\eta\right) dS_0,$$

причем $v \in H_2^{\alpha}\left(B_0\right)\ , \alpha \geq 2.$

Рассмотрим систему сепаратных бигармонических уравнений

$$\Delta^2 u_i = 0,\ x \in B_{i-1}\ ,\ i = 1, ..., n+1$$

в классе функций

$$u = u\left(x\right),$$

$u \in H_2^{\alpha}\left(B_n^{+}\right)\ , \alpha \geq 4,\ u\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \chi\left(B_{k-1}\right)\ u_k\left(x\right),$

где $\chi\left(B_{k-1}\right)$ -характеристическая функция множества B_{k-1}, с граничными условиями

$$u_1\left(\eta\right) = f\left(\eta\right), \eta \in S_0, f \in H_2^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(S_0\right)\ , \alpha \geq 4\ ,$$

$$\Delta u_1\left(\eta\right) = g\left(\eta\right), \eta \in S_0, g \in H_2^{\alpha-\frac{5}{2}}\left(S_0\right)\ , \alpha \geq 4$$

и условиям сопряжения на гиперсферах S_i :

$$u_i\left(\xi\right) = u_{i+1}\left(\xi\right), \quad k_i L_{\frac{m-2}{2}}\left[u_i\left(\xi\right)\right] = L_{\frac{m-2}{2}}\left[u_{i+1}\left(\xi\right)\right]\ ,\ \xi \in S_i;$$
$$l_i \Delta u_i\left(\xi\right) = \Delta u_{i+1}\left(\xi\right), \quad m_i L_{\frac{m-2}{2}}\left[\Delta u_i\left(\xi\right)\right] = L_{\frac{m-2}{2}}\left[\Delta u_{i+1}\left(\xi\right)\right]\ ,\ \xi \in S_i.$$

Заметим, что функции Δu_i являются решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном шаре:

$$\Delta\left(\Delta u_i\right) = 0, x \in B_{i-1},\ i = 1, ..., n,$$

с граничными условиями

$$\Delta u_1\left(\eta\right) = g\left(\eta\right) \tag{25.1}$$

и условиями сопряжения

$$l_i \Delta u_i\left(\xi\right) = \Delta u_{i+1}\left(\xi\right)\ , \quad m_i L_{\frac{m-2}{2}}\left[\Delta u_i\left(\xi\right)\right] = L_{\frac{m-2}{2}}\left[\Delta u_{i+1}\left(\xi\right)\right]\ ;\ \xi \in S_i. \tag{25.2}$$

Применим к кусочно- гармонической функции $\Delta u = \sum\limits_{k=1}^{n+\ 1} \chi\left(\mathrm{B_{k-1}}\right) \cdot \Delta u_k\left(x\right)$ оператор преобразования J, порождаемый краевой задачей (25.1)-(25.2).

По формуле Пуассона для шара имеем:

$$J\left[\Delta u\right]\left(x\right) = \int\limits_{S_0} P\left(x, \eta\right) g\left(\eta\right) dS_0,$$

где $P\left(x, \eta\right)$ – ядро Пуассона для шара. Из формулы (25.3) найдем:

$$\Delta u\left(x\right) = \int\limits_{S_0} J^{-1}\left[P\left(x, \eta\right)\right]\ g\left(\eta\right) dS_0.$$

В итоге для неизвестной кусочно-гармонической функции Δu имеем краевую задачу о решении сепаратной системы уравнений Пуассона

$$\Delta u_i\left(x\right) = \int\limits_{S_0} J^{-1}\left[P\left(x, \eta\right)\right]\ g\left(\eta\right) dS_0, x \in B_{i-1}, i = 1, ..., n \tag{25.3}$$

по граничному условию

$$u_1\left(\eta\right) = f\left(\eta\right), \quad \eta \in S_0 \tag{25.4}$$

и по условиям сопряжения

$$u_i(\xi) = u_{i+1}(\xi), \quad k_i L_{\frac{m-2}{2}}[u_i(\xi)] = L_{\frac{m-2}{2}}[u_{i+1}(\xi)]\ ,\ \xi \in S_i, i = 1,..,n. \tag{25.5}$$

Для нахождения неизвестной кусочно-гармонической функции Δu применим оператор сглаживания Y, порождаемый краевой задачей (25.3)-(25.4). Учитывая, что операторы Y, $|x|^2 \cdot \Delta$ и Γ коммутируют, для функции $v = Y[u(x)]$ имеем задачу Дирихле о решении уравнения Пуассона

$$\Delta v = |x|^{-2} \cdot Y \left[|x|^2 \cdot \int\limits_{S_0} J^{-1}[P(x,\eta)]\, g(\eta)\, dS_0 \right], x \in B_0$$

по краевому условию

$$v(\eta) = f(\eta), \eta \in S_0.$$

Из леммы 25.1. следует, что

$$v = \int\limits_{S_0} P(x,\eta) f(\eta)\, dS_0 + \frac{1}{2}\left(1 - |x|^{-2}\right) \cdot L_{m-2}^{-1} \cdot Y$$

$$\left[|x|^2 \cdot \int\limits_{S_0} J^{-1}[P(x,\eta)]\ g(\eta)\, dS_0 \right],$$

и, значит, неизвестное решение рассматриваемой краевой задачи имеет вид:

$$u = Y^{-1}[v].$$

Глава 26

Операторный метод для функций, обобщенно кусочно-плюригармонических в областях класса (T)

26.1 Постановка задачи

Перенесем результаты предыдущих параграфов на случай многих переменных. Пусть Ω выпуклая полная ограниченная кратно-круговая с центром в начале координат область класса (T). Задачи линейного сопряжения в классе плюригармонических функций на гиперповерхностях гомотетичных $\partial\Omega$ не ставятся из-за эффекта принудительного продолжения [26]. В дальнейшем мы предлагаем рассматривать задачи линейного сопряжения в классе обобщенно-плюригармонических функций.

Теорема [10]**.** Выпуклая полная ограниченная кратно-круговая с центром в начале координат область Ω класса (T) есть единичный шар по некоторой норме $\|z\|_{\Omega}$.

Примем обозначение

$$\Omega_j = \{z \in C^n : r_{j+1} < \|z\|_{\Omega} < r_j\}\, , j = 0, ..., n,$$

где $r_0, r_1, r_2, ..., \; r_n, r_{n+1}$ - точки на $[0, 1]$, такие, что

$$1 = r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n > r_{n+1} = 0; \frac{r_i}{r_0} \le \frac{r_{i+1}}{r_i}, i = 1, ..., n-1.$$

Определение [26]. Функция $u = u(z)$ называется обобщенно кусочно-плюригармонической в области $\Omega_j, j = 0, ..., n$, если:

1. Функция $u = u(z)$ бесконечно-дифференцируема в $\Omega_j, j = 0, ..., n$.
2. Для каждого $z \in \Omega_j$ срез-функция $u_z = u(\lambda z)$ гармонична в кольце

$$\{\lambda : r_{j+1} < |\lambda| < r_j\}, j = 0, ..., n.$$

Для функции $u = u(z)$ ограниченной и плюригармонической в области Ω, положим:

$$\Gamma_i [u] = \chi_\Omega (z) u(z) + \chi_\Omega (z) h_i \, u\left(z \cdot r_i^2\right) \;, \; i = 1, ..., n, \; 0 < h_i < 1, \quad (26.1)$$

$\chi_\Omega (z)$ - характеристическая функция множества Ω. Оператор, обратный к Γ_i, действует на функцию g ограниченную и плюригармоническую в области Ω по правилу:

$$\Gamma_i^{-1} [g] = \sum_{\|\mathrm{k}\|=0}^{\infty} (-1)^{\|k\|} h^k g\left(z \cdot r_i^{2k}\right). \quad (26.2)$$

Произведение операторов $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ обозначим символом Γ, $\Gamma \equiv \Gamma_n \cdot ... \cdot \Gamma_1$. Из формулы (26.1) получим выражение для обратного оператора Γ^{-1} :

$$\Gamma^{-1} [g] = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} (-1)^{\|k\|} h^k g\left(z \cdot r^{2k}\right), \; h^k = h^{k_1} \cdot ... \quad \cdot h^{k_n}, r^{2k} = \prod_{i=1}^{n} r_i^{2k_i} \; .$$

Пусть функция $u = u(z)$ кусочно-плюригармоническая в области Ω_n^+ :

$$\Omega_n^+ = \overset{n}{\underset{j=0}{U}} \Omega_j, \Omega_j = \{z : r_{j+1} < \|z\|_\Omega < r_j\}, j = 0, ..., n,$$

причем на гиперповерхностях сопряжения выполнено условие:

$$\begin{array}{l} u^-(\eta) = u^+(\eta), \\ k_i \frac{\partial}{\partial n} u^-(\eta) = \frac{\partial}{\partial n} u^+(\eta), \; \|\eta\|_\Omega = r_i; i = 1, ..., n, \end{array} \quad (26.3)$$

k_i - действительное, где $u^-(\eta), u^+(\eta)$ - предельные значения функции $u = u(z)$ извне и изнутри области $\|z\|_\Omega < r_i$, соответственно, а $\frac{\partial}{\partial n}u^-(\eta), \frac{\partial}{\partial n}u^+(\eta)$ - предельные значения нормальной производной функции $u = u(z)$. Оператор сглаживания для гиперповерхности сопряжения $\|z\|_\Omega = r_i$ определим равенством:

$$L_i[u] = \chi_{E_i^-}(z)\left(k_i u(z) + \frac{1-k_i}{2}u\left(\frac{z \cdot r_i^2}{\|z\|_\Omega^2}\right)\right) + \chi_{E_i^+}(z)\frac{k_i+1}{2}u(z), \quad (26.4)$$

где

$$E_i^+ = \left\{ z : \|z\|_\Omega^2 < r_i \right\}, E_i^- = \left\{ z : \|z\|_\Omega^2 > r_i \right\}.$$

Операторы, обратный к оператору L_i, имеет вид:

$$L_i^{-1}[g] = \chi_{E_i^-}(z)\frac{1}{k_i}\left(g(z) - \frac{1-k_i}{1+k_i}g\left(\frac{z \cdot r_i^2}{\|z\|_\Omega^2}\right)\right) + \chi_{E_i^+}(z)\frac{2}{k_i+1}g(z); \quad (26.5)$$

Произведение операторов $L_1, ..., L_n$ обозначим через L, $L \equiv L_n \cdot ... \cdot L_1$. Обратный к оператору L имеет вид $L^{-1} = L_1^{-1} \cdot ... \cdot L_n^{-1}$.

Приведем важнейшие свойства операторов сглаживания.

1. Оператор L функции f, кусочно-плюригармонической в Ω_n^+, сопоставляет функцию $\hat{f} = L[f]$ плюригармоническую в Ω_n^+.

2. Справедливо равенство

$$L[f] = \Gamma[f], \|\eta\|_\Omega^2 = 1,$$

при этом в выражении для оператора Γ положено

$$h_i = -\frac{1-k_i}{1+k_i}, i = 1, ..., n.$$

26.2 Формула Темлякова-Пуассона

Формула Темлякова-Пуассона в случае кусочно-однородной области класса (T) решает следующую задачу: найти функцию $u = u(z)$, обобщенно плюригармоническую в кусочно- однородной области Ω_n^+ класса (T) , по ее граничному значению $u = u(\eta)$ и условиям сопряжения

$$u^-(\eta) = u^+(\eta) \ ,$$
$$k_i \frac{\partial}{\partial n} u^-(\eta) = \frac{\partial}{\partial n} u^+(\eta) \, , \ \|\eta\|_\Omega = r_i; i = 1, ..., n \ .$$

Оператор $\Gamma \cdot L$ переводит поставленную задачу к соответствующей задаче для однородной области Ω. Применив формулу Темлякова-Пуассона [30], найдем:

$$u(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} L^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \int\limits_{\bar{\Delta}_n} d\tau^* \int u(\varsigma) \, Re \left(2 \frac{1}{\left(1 - \left\langle \tau, \frac{z r^{2j}}{\varsigma} \right\rangle\right)^n} - 1 \right) d\omega_\theta.$$

Следствие 26.1. Выпишем в явном виде формулу Темлякова-Пуассона с одной гиперсферой сопряжения $\|z\|_\Omega = r; 0 < r < 1$:

$$u(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} h^j \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\bar{\Delta}_n} d\tau^* \int u(\varsigma) \, Re \left(\left(2 \frac{1}{\left(1 - \left\langle \tau, \frac{z r^{2j}}{\varsigma} \right\rangle\right)^n} - 1 \right) - \right. \\ \left. - h \cdot \left(2 \frac{1}{\left(1 - \left\langle \tau, \frac{z r^{2j+2}}{\|z\|_\Omega^2 \varsigma} \right\rangle\right)^n} - 1 \right) \right) d\omega_\theta, \\ r < \|z\|_\Omega < 1; \\ \frac{2k}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{\infty} h^j \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\bar{\Delta}_n} d\tau^* \int u(\varsigma) \, Re \left(2 \frac{1}{\left(1 - \left\langle \tau, \frac{z r^{2j}}{\varsigma} \right\rangle\right)^n} - 1 \right) d\omega_\theta, \\ \|z\|_\Omega < r, \end{cases}$$

где

$$h = \frac{1-k}{1+k}.$$

Глава 27

Интегральные уравнения теории интерпретации результатов косвенных наблюдений

27.1 Ретроспективная задача для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу о структуре температурного поля, когда неизвестным является первоначальное распределение источников, порождающее заданное распределение температуры в бесконечном кусочно-однородном стержне $D^+ = (0, \infty) \times I_n$. Указанная задача возникает в связи с поиском решения сепаратной системы $(n+1)$ уравнений параболического типа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_j \left(t, x \right) = 0, \quad (t, x) \in D^+, \tag{27.1}$$

по начальным условиям

$$u_j \left(t, x \right) \left.\right|_{t=0} = f_j \left(x \right), \;\; x \in I_n, \tag{27.2}$$

по краевым условиям

$$u_1 |_{x=-\infty} = 0 \,, \quad u_{n+1} |_{x=\infty} = 0 \tag{27.3}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\alpha_{m1}^{k}\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{m1}^{k}\right]u_k=\left[\alpha_{m2}^{k}\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{m2}^{k}\right]u_{k+1}, \tag{27.4}$$

$$x=l_k,\quad k=1,...,n;\quad m=1,2,$$

здесь $u(t,x)$ - неизвестная функция, $f_i\,(x)$ - заданная функция, $\alpha_{mi}^{k},\ \beta_{mi}^{k},\ \gamma_{mi}^{k},\ \delta_{mi}^{k}$ - заданные действительные числа, при которых выполнено условие (6.6) неограниченной разрешимости задачи (27.1)-(27.4).

Решение задачи (27.1)-(27.4) имеет вид:

$$u_k\,(t,x)=\sum_{s=1}^{n+1}\int_{l_s}^{l_{s+1}}H_{ks}\,(t,x,\xi)\cdot f_s\,(\xi)\,d\xi, \tag{27.5}$$

где

$$H_{ks}\,(t,x,\xi)=\int_0^\infty\varphi_k\,(x,\lambda)\cdot\varphi_s^*\,(\xi,\lambda)\;\;e^{-\lambda^2 t}d\lambda, k,s=1,...,n+1,$$

φ,φ^* - собственные функции соответствующих прямой и двойственной задач Штурма- Лиувилля [9].

Пусть неизвестным является-

$$f\,(x)=\sum_{k=2}^{n}\theta\,(x-l_{k-1})\;\theta\,(l_k-x)\;f_k\,(x)+\theta\,(l_1-x)\;f_1\,(x)+\theta\,(x-l_n)\;f_{n+1}\,(x)-$$

первоначальное распределение источников, порождающее заданное распределение температуры в момент времени $t=\tau$:$u\,(\tau,x)$.

Для определения $f\,(x)$ имеем сепаратную систему интегральных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{n+1}\int_{l_s}^{l_{s+1}}H_{ks}\,(\tau,x,\xi)\cdot f_s\,(\xi)\,d\xi=u_k\,(\tau,x)\,. \tag{27.6}$$

В случае однородной среды система уравнений (27.6) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right)\cdot\hat{f}\,(\xi)\,d\xi=\hat{u}\,(\tau,x)\,. \tag{27.7}$$

Как следует из [18], решение уравнения (27.7) выражается формулой:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{u}^{(j)}(0)\ \tau^{\frac{j}{2}}}{j\,!} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right), \tag{27.8}$$

здесь H_j - система классических ортогональных функции Эрмита [19]. Для решения системы интегральных уравнений (27.6) применим метод операторов преобразования [5].

Прямой $J : \hat{f} \to f$ и обратный $J^{-1} : f \to \hat{f}$ операторы преобразования определим, следуя [5], равенствами:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi\, d\lambda,$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi,\lambda)\ f(\xi)\, d\xi\, d\lambda.$$

Введем обозначения для преобразования Фурье на кусочно-однородной действительной оси

$$F_n : f(x) \to \tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x,\lambda)\ f(x)\, dx.$$

Определим аналоги системы функций Эрмита на кусочно-однородной действительной оси:

$$H_{j,n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)\ \ H_j\left(2\sqrt{\tau}\lambda\right) d\lambda,$$

$$H^*_{j,n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x,\lambda)\ \ H_j\left(2\sqrt{\tau}\lambda\right) d\lambda$$

Лемма 27.1 . *Функции $H_{j,n}(x)$ $H^*_{j,n}(x)$ образуют биортогональную систему функций на кусочно-однородной действительной оси.*

Доказательство. Имеем равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{j,n}(x)\ \ H^*_{k,n}(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)\ \ H_j(\lambda)\, d\lambda \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x,\beta)\ \ H_k(\beta)\, d\beta \right) dx.$$

Переставляя интегралы местами, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{j,n}(x)\, H_{k,n}^{*}(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{*}(x,\beta)\ H_k(\beta)\, d\beta \right) dx \right) d\lambda.$$

По теореме разложения имеем:

$$H_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{*}(x,\beta)\ H_k(\beta)\, d\beta \right) dx\ .$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{j,n}(x)\, H_{k,n}^{*}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\lambda)\, H_k\ (\lambda)\ \ d\lambda = \delta_{jk}.$$

Теорема 27.1 . *Если функция $u(\tau,x) \in S^{/}(R)$ и для нее выполнено условие*

$$e^{\tau^2\lambda}\left(1+\lambda^2\right)^{\alpha/2} \tilde{u}(\tau,\lambda) \in L_2(R),$$

то система сепаратных интегральных уравнений (27.6) имеет единственное решение $f(x) \in H_2^{\alpha}(I_n)$, которое находится по формуле:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_n(u)}{2^j j!} H_{j,n}(x), \tag{27.9}$$

где

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^j\, \tilde{u}(\tau,\lambda)\, d\lambda.$$

Доказательство. Применим оператор преобразования J^{-1} к системе сепаратных интегральных уравнений (27.6). В результате придем к модельному интегральному уравнению (27.7). Решение уравнения (27.7) имеет вид:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{u}^{(j)}(0)\, \tau^{\frac{j}{2}}}{j!} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Подействуем оператором J на обе части полученного равенства, в итоге, учитывая непрерывность оператора J, найдем неизвестное распределение температуры:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{u}^{(j)}(0)\,\tau^{\frac{j}{2}}}{j!} H_{j,n}(x).$$

Вычислим числа $\hat{u}^{(j)}(0)$. Имеем:

$$\hat{u}^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^j \, F[\hat{u}](\lambda)\, d\lambda,$$

из определения оператора преобразования J следует, что

$$F[\hat{u}](\lambda) = F_n[u](\lambda).$$

Таким образом,

$$\hat{u}^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^j \, F_n[u](\lambda)\, d\lambda.$$

27.2 Ретроспективная задача для итерированного уравнения теплопроводности.

а) Однородный случай. Пусть $\hat{u}(\tau, x), x \in R$ - ограниченное на множестве

$$D = (0, \infty) \times I_n = \{(t, x) : \ \ t \geq 0, \ x \in R\},$$

решение итерированного уравнения теплопроводности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{q+1} \hat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D$$

с начальными условиями

$$\hat{u}_i(0, x) = \hat{f}_i(x), \ \ x \in R$$

где принято обозначение:

$$\hat{u}_i(t, x) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \hat{u}(t, x), \mathrm{i} = 0, ..., \mathrm{q}$$

и краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial x^i}\hat{u}\left(t,x\right)\right|_{x=-\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial^i}{\partial x^i}\hat{u}\left(t,x\right)\right|_{x=+\infty}=0, i=0,...,q\ .$$

Рассмотрим задачу определения начальных значений $\hat{f}_i\left(x\right), i=0,...,q$ по системе функций $\hat{u}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$, т.е. по известным решению и его производным до порядка q в момент времени $t=\tau$.

Пусть $\hat{v}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$ - решения модельных уравнений теплопроводности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\hat{v}_i\left(t,x\right)=0,\quad (t,x)\in D, i=0,...,q \tag{27.10}$$

с начальными условиями

$$\hat{v}_i\left(0,x\right)=\hat{f}_i\left(x\right),\quad x\in R \tag{27.11}$$

краевыми условиями

$$\hat{v}_i\left(t,x\right)|_{x=-\infty}=0,\quad \hat{v}_i\left(t,x\right)|_{x=+\infty}=0, i=0,...,q\ . \tag{27.12}$$

Непосредственная проверка показывает, что системы функций $\hat{u}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$ и $\hat{v}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$ зависимы. Справедлива

Лемма 27.2 . *Система функций $\hat{u}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$ и $\hat{v}_i\left(\tau,x\right), i=0,...,q$ связаны между собой равенствами:*

$$\begin{pmatrix}\hat{v}_0\left(\tau,x\right)\\ \vdots\\ \hat{v}_q\left(\tau,x\right)\end{pmatrix}=\Gamma\left(D^2\right)\ \sum_{k=0}^{q}\frac{J_k}{k!}t^k\ \Gamma\left(-D^2\right)\ \begin{pmatrix}\hat{u}_0\left(\tau,x\right)\\ \vdots\\ \hat{u}_q\left(\tau,x\right)\end{pmatrix} \tag{27.13}$$

$\Gamma\left(D^2\right)$ *- операторная матрица вида:*

$$\Gamma\left(D^2\right)=\begin{pmatrix} D^0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ D^2 & D^0 & 0 & \dots & 0\\ D^4 & 2D^2 & D^0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_q^0 D^{2q} & C_q^1 D^{2q-2} & C_q^2 D^{2q-4} & \dots & C_q^q D^0\end{pmatrix},$$

J_k - матрица размера $(q+1)\times(q+1)$ у которой диагональ, соединяющая элементы $\gamma_{1,k+1}$ и $\gamma_{q+1-k,q+1}$, состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Теорема 27.2 . *Если для системы функций $\hat{u}_i(\tau,x)\in S^/(R)\,, i=0,...,q$ выполнено условие*

$$e^{\tau^2\lambda}\left(1+\lambda^2\right)^{q+\alpha/2}F\left[\hat{u}_i\right](\tau,\lambda)\in L_2(R)\,,...,i=0,...,q,$$

то:

$$\left(\begin{array}{c}\hat{f}_0(x)\\ \vdots\\ \hat{f}_q(x)\end{array}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}D^j\hat{v}_0(\tau,0)\\ \vdots\\ D^j\hat{v}_q(\tau,0)\end{array}\right)\frac{\tau^{\frac{j}{2}}}{j!}H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right), \qquad (27.14)$$

причем $\hat{f}_i(x)\in H_2^\alpha(R)\,,i=0,...,q,$ и значения $\hat{v}_i(\tau,x)\,,i=0,...,q$ следует взять из формулы (27.13).

Доказательство. Применим формулу (27.9) к каждому из $(q+1)$ начальных условий $\hat{f}_i(x)$ в модельных задачах (27.10)-(27.12). В итоге приходим к (27.14).

b) Случай кусочно-однородной оси. Пусть неизвестным является

$$f_i(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)\,f_{ik}(x)-$$

первоначальное распределение, порождающее заданное распределение в момент времени $t=\tau$:$u_0(\tau,x)$,

где $u_{0m}(t,x)$ - решение сепаратной системы дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^q u_{0m}(t,x)=0,\;\;(t,x)\in D,\;\;m=1,...,n+1, \qquad (27.15)$$

а также заданное распределение в момент времени $t=\tau$ производных функции $u_0(\tau,x)$ до порядка q включая: $u_i(\tau,x)$,

$$u_{im}=\frac{\partial^i}{\partial t^i}u_{0m}(\tau,x)\,,i=1,...,q,$$

при этом выполняются:
начальные условия

$$u_{im}(0,x) = f_{im}(x), x \in I_n, m = 1, ..., n+1 \tag{27.16}$$

краевые условия

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} u_{01}(t,x)\bigg|_{x=-\infty} = 0, \quad \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_{0,n+1}(t,x)\bigg|_{x=+\infty} = 0, i = 0, ..., q \tag{27.17}$$

и условия сопряжения

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{2q-1} \alpha_{m1,i}^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_{0k} = \sum\limits_{i=0}^{2q-1} \alpha_{m2,i}^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_{0,k+1}, x = l_k, \\ k = 1, ..., n; \quad m = 1, ..., 2q. \end{array} \tag{27.18}$$

здесь $\alpha_{js,i}^k$; $j = 1, ..., 2q$, $s = 1, 2$, $i = 0, ..., 2q-1$ -заданные действительные числа, при которых выполнено условие неограниченной разрешимости задачи (27.15)-(27.18). Поиск решения приводит к сепаратной системе интегральных уравнений:

$$u_{ik}(t,x) = \sum_{s=1}^{n+1} \int_{l_s}^{l_{s+1}} H_{i,ks}(t,x,\xi) \cdot f_{is}(\xi)\, d\xi, \tag{27.19}$$

здесь

$$H_{i,ks}(t,x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\lambda^2\right)^i \varphi_k(x,\lambda) \cdot \varphi_s^*(\xi,\lambda) \;\; e^{-\lambda^2 t} d\lambda,$$

$i = 0, ..., q; k, s = 1, ..., n+1,$

φ, φ^* - собственные функции соответствующие прямой и двойственной задач Штурма Лиувилля [5], связанной с данной смешанной краевой задачей (27.15)-(27.18). Применение оператора преобразования J^{-1} приводит изучаемую задачу к однородному случаю -т.е. к задаче (27.10)-(27.12).

По схеме, предложенной при доказательстве теоремы 27.1, устанавливается справедливость следующего результата:

Теорема 27.3 . *Если функции* $u_i(\tau,x) \in S^{/}(R)$, $i = 0, ..., q$ *и для каждой из них выполнено условие*

$$e^{\tau^2\lambda}\left(1+\lambda^2\right)^{q+\alpha/2} F\left[u_i\right](\lambda)\in L_2(R),$$

то система сепаратных интегральных уравнений (27.19) имеет единственное решение $\begin{pmatrix} f_0(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} \in H_2^{\alpha}(I_n)$, *которое находится по формуле:*

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j j!} \begin{pmatrix} D^j v_0(x) \\ \vdots \\ D^j v_q(x) \end{pmatrix} H_{j,n}(x), \tag{27.20}$$

где

$$D^j v_k(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^j F_n\left[v_k\right](\lambda)\, d\lambda, k=0,...,q,$$

$$\begin{pmatrix} v_0(\tau,x) \\ \vdots \\ v_q(\tau,x) \end{pmatrix} = \Gamma\left(D^2\right)\ \sum_{k=0}^{q} \frac{J_k}{k!}\, t^k\, \Gamma\left(-D^2\right)\ \begin{pmatrix} u_0(\tau,x) \\ \vdots \\ u_q(\tau,x) \end{pmatrix},$$

F_n *- преобразование Фурье на кусочно-однородной оси с* n *точками сопряжения [5].*

27.3 Обобщения результатов для q -итерации дифференциального оператора второго порядка общего вида.

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau,x,\xi)\cdot f(\xi)\, d\xi = u(\tau,x), \tag{27.21}$$

где

$$H(\tau,x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)\cdot\varphi^*(\xi,\lambda)\ \ e^{-\lambda^2\tau} d\lambda,$$

$\varphi(x,\lambda), \varphi^*(\xi,\lambda)$ -собственные функции прямой и двойственной задач Штурма-Лиувилля на действительной для оператораL (L- дифференциального оператора второго порядка общего вида).

Теорема 27.4 . *Если функция $u(\tau,x) \in S^{/}(R)$ и для нее выполнено условие*

$$e^{\tau^2\lambda}\left(1+\lambda^2\right)^{\alpha/2}\tilde{u}(\tau,\lambda) \in L_2(R),$$

где

$$\tilde{u}(\tau,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi,\lambda)\ u(\tau,\xi)\,d\xi,$$

то система сепаратных интегральных уравнений (27.21) имеет единственное решение $f(x) \in H_2^{\alpha}(I_n)$, которое находится по формуле:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{D_n(u)}{2^j j!}H_j(x), \tag{27.22}$$

где

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)^j\,\tilde{u}(\tau,\lambda)\,d\lambda.$$

$$\wp_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)\ H_j\left(2\sqrt{\tau}\lambda\right)d\lambda,$$

$\wp_j(x)$ *-аналог функций Эрмита.*

Рассмотрим систему сепаратных интегральных уравнений, порождаемую смешанной краевой задачей, аналогичной задаче (27.15)-(27.18) с заменой оператора D^2 на оператор L :

$$u_{ik}(t,x) = \sum_{s=1}^{n+1}\int_{l_s}^{l_{s+1}} H_{i,ks}(t,x,\xi)\cdot f_{is}(\xi)\,d\xi, \tag{27.23}$$

где

$$H_{i,ks}(t,x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\lambda^2\right)^{\,i}\varphi_k(x,\lambda)\cdot\varphi_s^*(\xi,\lambda)\ \ e^{-\lambda^2 t}d\lambda,$$

$\varphi(x,\lambda), \varphi^*(\xi,\lambda)$ -собственные функции прямой и двойственной задач Штурма-Лиувилля на действительной оси для q итерации оператора L.

Теорема 27.5 . *Если система функций* $\hat{u}_i(\tau,x) \in S^{/}(R), i = 0,...,q$ *и выполнено условие*

$$e^{\tau^2\lambda}\left(1+\lambda^2\right)^{q+\alpha/2} F\left[\hat{u}_i\right](\tau,\lambda) \in L_2(R),...,i=0,...,q,$$

то решение сепаратной системы интегральных уравнений (27.23) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_0(x) \\ \vdots \\ \hat{f}_q(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} D^j\hat{v}_0(\tau,0) \\ \vdots \\ D^j\hat{v}_q(\tau,0) \end{pmatrix} \frac{\tau^{\frac{j}{2}}}{j\,!} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right), \qquad (27.24)$$

где

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_0(\tau,x) \\ \vdots \\ \hat{v}_0(\tau,x) \end{pmatrix} = \Gamma(L) \sum_{k=0}^{q} \frac{J_k}{k!} t^k\, \Gamma(-L) \begin{pmatrix} \hat{u}_0(\tau,x) \\ \vdots \\ \hat{u}_0(\tau,x) \end{pmatrix},$$

$\Gamma(L)$ - *операторная матрица вида:*

$$\Gamma(L) = \begin{pmatrix} L^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L & L^0 & 0 & \dots & 0 \\ L^2 & 2L & L^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_q^0 L^q & C_q^1 L^{q-1} & C_q^2 L^{q-2} & \dots & C_q^q L^0 \end{pmatrix},$$

причем $\hat{f}_i(x) \in H_2^{\alpha}(R), i = 0,...,q.$

Часть V

Корректные алгоритмы теории распознавания

Глава 28

Восстановление зависимостей в классе кусочно-полиномиальных функций

28.1 Постановка задачи.

В теории прямых и обратных задач математической физики кусочно-однородных сред, а также задач интерпретации результатов наблюдений [12] возникает класс кусочно-гладких функций. Рассмотрим однопараметрическое семейство функции $f\left(t,\alpha\right)$, заданных на составном промежутке I_n,

$$I_n = \left\{t :\ t \in \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(a_{j-1}, a_j\right),\ \ a = a_0 \geq 0,\ \ a_{n+1} = b < \infty\right\};$$

имеющих предельные значения $f\left(a+0,\alpha\right)$, $f\left(\ b-0,\alpha\right)$, $f^{/}\left(\ a+\ 0,\alpha\right), f^{/}\left(b-0,\alpha\right)$; удовлетворяющих в точках стыка $t = l_k, \quad k = 1,...,n$, условиям:

$$\begin{aligned} &f\left(a_k - 0,\alpha\right) = f\left(a_k + 0,\alpha\right)\ , \\ &\chi_k f^{/}\left(a_k - 0,\alpha\right) = f^{/}\left(a_k + 0,\alpha\right)\ , \end{aligned} \tag{28.1}$$

где $\chi_k > 0$ - заданные постоянные.

Пусть в классе $f\left(t,\alpha\right), t \in I_n$ надо восстановить функциональную зависимость $f\left(t,\alpha_0\right) = f\left(t\right)$ [12] и пусть значения функции $f\left(t\right)$ неизвестны, но известны значения другой функции $F\left(x\right)$, заданной на I_n, связанной с искомой операторным уравнением:

$$Af(t) = F(x). \tag{28.2}$$

Пусть в результате измерений получены значения функции $F(x)$:

$$y_j = F(x_j) + \xi, j = 1, ..., i, \tag{28.3}$$

ξ - аддитивная помеха,

$$M\xi = 0, M\xi^2 = \sigma^2 < \infty,$$

не зависящая от x. Точки x_j определяются случайно и независимо с равномерной плотностью на кусочно-однородном отрезке I_n. Таким образом, по результатам измерений (28.3) необходимо восстановить функцию $f(t) = f(t, \alpha_0)$ в классе функций $f(t, \alpha)$. При этом допускается, что задача (28.2) может быть некорректной.

Проблема поиска корректных алгоритмов, распознающих данную выборку без ошибок, в общем виде решена Журавлевым Ю.И. [14]. В этом разделе рассмотрен стохастический вариант задачи восстановления функциональных зависимостей [12], аппаратом служит метод операторов преобразования [5] .

28.2 Операторы преобразования в классе кусочно-полиномиальных функций.

Пусть функция $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$ и пусть $\tilde{f}(t), \tilde{f}^{/}(t) \in L_2[a, b]$, с нормой
$\left\|\tilde{f}\right\|^2 = \int_a^b \tilde{f}^2(t)\,dt$, а функция $f = f(t)$ определена на кусочно-однородном отрезке I_n, $f(t), f^{/}(t) \in L_2[I_n]$ с нормой $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f^2(t)\,dt$. Обозначим через $\tilde{v}_j(t)$ - собственные функции оператора Фурье $-\frac{d^2}{dt^2}$ на отрезке $[a, b]$ с условиями периодичности, т.е. $\tilde{v}_j(t)$ - решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d^{\,2}}{dt^{\,2}} v_j(t) = j^2 v_j(t);$$

$$v_j(a) = v_j(b),$$

$$v_j^/\left(a\right) = v_j^/\left(b\right),$$

а через $v_j\left(t\right)$ - собственные функции, λ_j - собственные значения оператора Фурье $-\frac{d^2}{dt^2}$ на составном промежутке I_n с условиями периодичности:

$$-\frac{d^{\ 2}}{dt^{\ 2}} v_j\left(t\right) = \lambda_j v_j\left(t\right);$$

$$v_j\left(a\right) = v_j\left(b\right),$$

$$v_j^/\left(a\right) = v_j^/\left(b\right),$$

и условиями сопряжения в точках стыка $t = a_k, k = 1, .., n$:

$$v_j\left(a_k - 0\right) = v_j\left(a_k + 0\right),$$

$$v_j^/\left(a_k - 0\right) = \tilde{v}_j^/\left(a_k + 0\right).$$

Обозначим через $\tilde{A}_j$ коэффициенты ряда Фурье функции $\tilde{f}\left(\mathrm{t}\right)$ по системе собственных функций $\tilde{v}_j\left(t\right)$. По теореме Рисса-Фишера [16] существует функция $f \in L_2\left[I_n\right]$, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_{I_n} v_j\left(t\right) f\left(t\right) dx = \tilde{c}_j, j = 1, 2, ... \tag{28.4}$$

Оператор P, ставящий в соответствие функции $\tilde{f}$ функцию f (P : $\tilde{f} \rightarrow f$) назовем *оператором преобразования.*

Замечание. Если функция $\tilde{f}$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условиям периодичности:

$$\tilde{f}\left(a\right) = \tilde{f}\left(b\right),$$

$$\tilde{f}^/\left(a\right) = \tilde{f}^/\left(b\right),$$

то оператор преобразования P определяется формулой:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t)\ \tilde{c}_j. \qquad (28.5)$$

Пусть теперь заданы коэффициенты A_j ряда Фурье функции $f(t)$ по системе собственных функций $v_j(t)$. По теореме Рисса-Фишера существует функция $\tilde{f} \in L_2[a,b]$, удовлетворяющая условию:

$$\int_{l_0}^{l} \tilde{v}_j(t)\,\tilde{f}(t)\,dt = c_j, j = 1, 2, ... \qquad (28.6)$$

В результате задан оператор P^{-1}, ставящий в соответствие функции f функцию $\tilde{f}$ ($P^{-1} : f \to \tilde{f}$). Операторы P и P^{-1} - взаимно обратные.

Определим оператор P^*, сопряженный к оператору P, равенством:

$$P\frac{d}{dt}\left[\tilde{f}\right] = \frac{d}{dt}P^*\left[\tilde{f}\right], \qquad (28.7)$$

где

$$\tilde{f}^{/} \in L_2[l_0, l].$$

Отметим следующее свойство операторов преобразования P.

Теорема 28.1 . *Оператор преобразования P осуществляет непрерывное отображение из $L_2[a,b]$ в $L_2[I_n]$.*

Доказательство. Запишем равенство Парсеваля для функций f и $\tilde{f}$:

$$\int_a^b \tilde{f}^2(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j^2,$$

$$\int_{I_n} f^2(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2.$$

Из определения оператора преобразования P следует, что

$$c_j = \tilde{c}_j,$$

и, поэтому,

$$\int_{a}^{b} \tilde{f}^2(t)\,dt = \int_{I_n} f^2(t)\,dt.$$

Таким образом, если последовательность $\tilde{f}_j$ сходится к нулю в $L_2[a,b]$, то соответствующая последовательность f_j сходится к нулю в $L_2[I_n]$.

28.3 Обобщенные сплайны.

Пусть отрезок $[a,b]$, на котором ведется восстановление зависимости разбит на части:

$$[a_0,a_1], [a_1,a_2], ..., [a_N,b], b = a_{n+1}.$$

Определим следующий класс функций $V_N^m(t,\alpha)$: на каждом из промежутков $[a_0,a_1], [a_1,a_2], ..., [a_N,b]$ функция $V_N^m(t,\alpha)$ совпадает с некоторым полиномом степени m и удовлетворяет в точках стыка $a = a_{\mathrm{k}}, k = 1,...,N$ условиям сопряжения вида:

$$\begin{array}{l} \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} V_N^m(a_k-0,\alpha) = \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} V_N^m(a_k+0,\alpha)\ , j = 0,1,2,...,\left[\frac{m}{2}\right], \\ \chi_k \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m(a_k-0,\alpha) = \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m(a_k+0,\alpha)\ , j = 0,1,2,...,\left[\frac{m-1}{2}\right], \end{array}$$

а также условиям периодичности:

$$\frac{d^j}{dt^j} V_N^m(a,\alpha) = \frac{d^j}{dt^j} V_N^m(a,\alpha)\ , j = 0,1,2,...,m.$$

Сплайны $V_N^m(t,\alpha)$ в отличие от классических сплайнов степени m, сопряженных в точках $a_1,a_2,...,a_N$ [12], имеют разрывные производные нечетного порядка, и поэтому их использование более естественно в задачах анализа и математической физики кусочно-однородных сред.

Для построения сплайнов $V_N^m(t,\alpha)$ введем в рассмотрение систему фундаментальных сплайнов. Для кубических сплайнов с N сопряжениями вводится $N+4$ фундаментальных сплайна

$$\mu_1(\mathrm{t}), \mu_2(t), ..., \mu_{N+4}(t).$$

Фундаментальные сплайны однозначно определяются условиями

$$\mu_1(a_i) = 0, \mu_1^{/}(a_0) = 1, \mu_1^{/}(a_{N+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., N+1),$$

$$\mu_2(a_i) = 0, \mu_2^{/}(a_0) = 0, \mu_2^{/}(a_{N+1}) = 1 \quad (i = 1, 2, ..., N+1)$$

$$\mu_r(a_k) = \delta_{k,r-3}, \quad \mu_r^{/}(a_0) = 0, \quad \mu_r^{/}(a_{N+1}) = 0,$$

$$(r = 3, ..., N+4; k = 0, 1, ..., N+1),$$

здесь δ_{ij} - символ Кронекера. Поскольку любой сплайн $V_N^3(t,\alpha)$ полностью определяется $N+2$ значениями в узлах a_i $(i = 0, 1, ..., N+1)$ и значениями первой производной на концах отрезка, то имеет место равенство

$$V_N^3(t,\alpha) = \sum_{j=0}^{N+1} V_N^3(a_j,\alpha)\,\mu_{j+3}(t) + \left[V_N^3(t,\alpha)\right]_a^{/}\mu_1(t) + \left[V_N^3(t,\alpha)\right]_b^{/}\mu_2(t).$$

Таким образом, если будут найдены конкретные выражения для системы фундаментальных сплайнов $\mu_1(t), \mu_2(t), ..., \mu_{N+4}(t)$, то окажется возможным представить класс сплайнов $V_N^3(t,\alpha)$ в параметрическом виде

$$V_N^3(t,\alpha) = \sum_{i=1}^{N+4} \alpha_i \mu_i(t).$$

Пусть m_{i+1}, m_i - значения второй производной сплайна $V_N^3(t,\alpha)$ в узлах a_{i+1}, a_i равномерной сетки с шагом Δ,
$(a_{i+1} - a_i = \Delta)$. Так как вторая производная полинома третьей степени линейная функция, то для $t \in [a_i, a_{i+1}]$ справедливо

$$V\ _N^3(x,\alpha)^{//} = m_{i+1}\frac{x - a_i}{\Delta} + m_i\frac{a_{i+1} - x}{\Delta},$$

где

$$m_{i+1} = V_N^3(a_{i+1},\alpha), \quad m_i = V_N^3(a_i,\alpha).$$

Проинтегрировав дважды эту функцию с учетом непрерывности сплайна на концах отрезка , получим, что кубический сплайн на отрезке описывается формулой

$$V_N^3\left(t,\alpha\right)=\tfrac{1}{6\Delta}\left[m_{i+1}(t-a_i)^3+m_i(a_{i+1}-t)^3+\right.$$
$$+\left(6V_N^3\left(a_i,\alpha\right)-\Delta^2 m_i\right)\left(a_{i+1}-t\right)+$$

$$\left.+\left(6V_N^3\left(a_{i+1},a_i\right)-\Delta^2 m_i\right)\left(t-a_i\right)\right].$$

На всем отрезке $[a,b]$ полученная функция непрерывна, но ее первая производная может не удовлетворять условиям сопряжения. Чтобы избежать этого, выберем величины из условий сопряжения, т.е. из условия

$$\chi_i\frac{d}{dt}V^3_N\left(a_{i+1}-0\right)=\frac{d}{dt}V_N^3\left(a_i+0\right),$$

т.е.

$$\chi_i\left(\frac{\Delta}{3}m_i+\frac{\Delta}{3}m_{i+1}+\frac{V_N^3\left(a_{i+1},\alpha\right)-V_N^3\left(a_i,\alpha\right)}{\Delta}\right)=$$

$$=-\frac{\Delta}{3}m_{i+1}-\frac{\Delta}{3}m_{i+2}+\frac{V_N^3\left(a_{i+2},\alpha\right)-V_N^3\left(a_{i+1},\alpha\right)}{\Delta}.$$

Таким образом, для определения $N+2$ значений получено N линейных уравнений. Еще два уравнения дают краевые условия

$$\frac{d}{dt}V_N^3\left(a+0\right)=V_a^{/}\qquad\frac{d}{dt}V_N^3\left(b-0\right)=V_b^{/}$$

откуда получаем

$$2m_1+m_2=\frac{6}{\Delta}\left(\frac{V_N^3\left(a_1,\alpha\right)-V_N^3\left(a_0,\alpha\right)}{\Delta}-V_b^{/}\right),$$

$$m_{N+1}+2m_{N+2}=\frac{6}{\Delta}\left(V_b^{/}-\frac{V_N^3\left(a_{N+1},\alpha\right)-V_N^3\left(a_N,\alpha\right)}{\Delta}\right).$$

В матричной форме записи система имеет вид

$$CM^*=D,$$

$C=$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1/2 & \chi_1+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \chi_2/2 & \chi_2+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-1}/2 & \chi_{N-1}+1 & 1/2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{\mathrm{N}}/2 & \chi_{\mathrm{N}}+1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{N+2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N+2} \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{6}{\Delta}\left(\frac{V_N^3(a_1,\alpha) - V_N^3(a_0,\alpha)}{\Delta} - V_a^/\right),$$

$$d_{N+2} = \frac{6}{\Delta}\left(V_{\mathrm{b}}^/ - \frac{V_N^3(a_{N+1},\alpha) - V_N^3(a_N,\alpha)}{\Delta}\right),$$

$$d_i = \frac{3}{\Delta^2}\left(V_N^3(a_{i+2},\alpha) - (1+\chi_i)V_N^3(a_{i+1},\alpha) + \chi_i V_N^3(a_i,\alpha)\right), i = 2,...,N+1.$$

Для построения фундаментальных сплайнов $\mu_1(t),...,\mu_{N+4}(t)$ удобно представить вектор $D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & d_{N+2} \end{pmatrix}^T$ как произведение вектора V_i^T определяющих значений $V_i =$

$$\left(\frac{d}{dt}\left[V_{\mathrm{N}}^3(a_0,\alpha)\right], V_N^3(a_0,\alpha), V_N^3(a_1,\alpha), ..., V_N^3(a_{N+1},\alpha), \frac{d}{dt}\left[V_N^3(a_{N+1},\alpha)\right]\right)^*$$

на матрицу B, которая имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\Delta} & -\frac{6}{\Delta^2} & \frac{6}{\Delta^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{3(\chi_1+1)}{\Delta^2} & \frac{3\chi_1}{\Delta^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{3(\chi_N+1)}{\Delta^2} & \frac{3\chi_N}{\Delta^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{6}{\Delta^2} & -\frac{6}{\Delta^2} & \frac{6}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Определяющими значениями фундаментальных сплайнов являются единичные векторы V_i^*, у которых единице равна координата с номером фундаментального сплайна. Упорядочим фундаментальные сплайны таким образом, чтобы матрица определяющих значений стала единичной. Т.е. принято такое упорядочение

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \mu_1 & \mu_3 & \dots & \mu_{N+4} & \mu_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{array} \right)
\end{array}.$$

Матрица M значений вторых производных $N+4$ фундаментальных сплайнов

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,N+4} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{N+2,1} & \dots & m_{N+2,N+4} \end{pmatrix}$$

определяется как решение матричного уравнения

$$CM = B.$$

Зная матрицу M, легко вычислить значения фундаментальных сплайнов. Они вычисляются по формулам: для $t \in [a_i, a_{i+1}]$,

$$\mu_j(t) = m_{i,j-2}\frac{(a_{i+1}-t)^3}{6\Delta} + m_{i+1,j-2}\frac{(t-a_i)^3}{6\Delta} + \tag{28.8}$$

$$+\left(\delta_{i+1,j-3} - m_{i+1,j-2}\frac{\Delta^2}{6}\right)\frac{t-a_i}{\Delta} + \left(\delta_{i,j-3} - m_{i,j-2}\frac{\Delta^2}{6}\right)\frac{a_{i+1}-t}{\Delta}.$$

Матрицу M можно вычислить аналитически:

$$M = C^{-1}B.$$

Для этого достаточно найти матрицу C^{-1}.

Обозначим через D_n определитель матрицы :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1/2 & \chi_1+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \chi_2/2 & \chi_2+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-2}/2 & \chi_{N-2}+1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-1}/2 & \chi_{N-1}+1 \end{pmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по алгебраическим дополнениям элементов последнего столбца, получим рекуррентную формулу для вычисления определителя

$$D_n = (\chi_{n-1}+1)\, D_{n-1} - \frac{\chi_{n-1}}{2} D_{n-2}, D_1 = 2, D_0 = 1 :$$

Используя определители D_n, вычислим элементы обратной матрицы C^{-1}. Получаем

$$c_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{2^{j-i}} \frac{D_{i-1} D_{N+2-j}}{D_{N+2}} \quad (1 < i \le j \le N+2)\,.$$

$$c_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{2^{i-j}} \frac{D_{j-1} D_{N+2-i}}{D_{N+2}} \quad (1 \le j \le i < N+2)$$

$$c_{1j}^{-1} = \frac{(-1)^{1+j}}{2^{j-2}} \frac{D_{N+2-j}}{D_{N+2}} \quad (1 < j \le N+2)\,. \tag{28.9}$$

$$c_{N+2,j}^{-1} = \frac{(-1)^{N+j}}{2^{N+1-j}} \frac{D_{j-1}}{D_{N+2}} \quad (1 \le j < N+2)\,.$$

Итак, для того чтобы найти систему обобщенных кубических фундаментальных сплайнов с N сопряжениями, надо:

вычислить величины D_n ;

по формулам (28.9) получить матрицу C^{-1} размера ;

вычислить матрицу размера $(N+2)\times(N+4)$ по формуле $M = C^{-1}B$;

по формулам (28.8) получить фундаментальные сплайны.

Задача восстановления регрессии в классе сплайнов $V_N^3\,(t,\alpha)$ состоит в определении функции $V_N^3\,(t,\alpha_M)$ из $V_N^3\,(t,\alpha)$, минимизирующей эмпирический риск:

$$I_{\ e}(\alpha)=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-V_N^3(x_i,\alpha)\right)^2. \tag{28.10}$$

Учитывая разложение сплайна по системе фундаментальных сплайнов, перепишем формулу (28.10) в виде:

$$I_{\ e}(\alpha)=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\mu_j(t_i)\right)^2. \tag{28.11}$$

Минимум эмпирического риска $I_e(\alpha)$ вычисляется по известным формулам [12]: вектор параметров $\alpha_M=\left(\alpha_1^M,...,\alpha_{\mathrm{N+4}}^M\right)^T$ равен

$$\alpha_e=\left(\Psi_{N+4}^T\Psi_{N+4}\right)^{-1}\Psi_{N+4}^T Y,$$

где Y- вектор значений $y_1,\ldots,y_l$; Ψ_{N+4} - матрица,

$$\Psi_{N+4}=\begin{pmatrix}\psi_1(x_1) & \ldots & \psi_{N+4}(x_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_1(x_{N+4}) & \ldots & \psi_{N+4}(x_{N+4})\end{pmatrix}.$$

Таким образом, после того как фундаментальная система сплайнов построена, вычисление сплайна минимизирующего эмпирический риск, проводится по классической схеме определения коэффициентов линейной по параметрам α регрессии. Алгоритм упорядоченной минимизации риска в классе обобщенных кубических сплайнов проводится по разработанной в монографии [12] схеме.

28.4 Обобщенные сплайны для кусочно-однородной полуоси.

Пусть действительная полуось $[a,\infty)$, на которой ведется восстановление зависимости, разбита на часть $[a_0,a_1],[a_1,a_2],...,[a_N,\infty)$. Определим следующий класс функций $V_N^m(x,\alpha)$: на каждом из подынтервалов функция $V_N^m(x,\alpha)$ совпадает с некоторым обобщенным полиномом $e^{-x}p_m(x)$ и удовлетворяет в точках стыка $t=a_k, k=1,...,N$ условиям сопряжения вида:

$\frac{d^{2j}}{d\ t^{2j}} V_N^m (a_k - 0, \alpha) = \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} V_N^m (a_k + 0, \alpha)\ , j = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{m}{2} \right],$
$\chi_k \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m (a_k - 0, \alpha) = \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m (a_k + 0, \alpha)\ \ , j = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{m-1}{2} \right], \chi_k > 0\ ,$

Сплайны $V_N^m (t, \alpha)$ в отличие от классических сплайнов степени m [12], сопряженных в точках $a_1, a_2, ..., a_N$ убывают на бесконечности и имеют разрывные производные нечетного порядка.

Для построения сплайнов $V_N^m (t, \alpha)$ введем в рассмотрение систему фундаментальных сплайнов. Для сплайнов $V_N^3 (t, \alpha)$ с N сопряжениями вводится $N\ +2$ фундаментальных сплайна

$$\mu_1 (t), \mu_2 (t), ..., \mu_{N+2} (t).$$

Фундаментальные сплайны однозначно определяются условиями

$$\mu_1 (a_i) = 0, \mu_1^{/} (a_0) = 1, \quad (i = 1, 2, ..., N + 1),$$

$$\mu_r (a_k) = \delta_{k,r-2}, \quad \mu_r^{/} (a_0) = 0,$$

$$(r = 2, ..., N + 2; k = 0, 1, ..., N),$$

здесь δ_{ij} - символ Кронекера.

Поскольку любой сплайн $V_N^3 (\ t, \alpha)$ полностью определяется $N+2$ значениями в узлах a_i $(i = 0, 1, ..., N + 1)$ и значениями первой производной в точке a_0, то имеет место равенство

$$V_N^3 (\mathrm{t}, \alpha) = \sum_{j=0}^{N} V_N^3 (a_j, \alpha) \mu_{j+2} (t) + \left[V_N^3 (t, \alpha) \right]_a^{/} \mu_1 (t).$$

Таким образом, если будут найдены конкретные выражения для системы фундаментальных сплайнов $\mu_1 (t), \mu_2 (t), ..., \mu_{N+2} (t)$, то окажется возможным представить класс сплайнов $V_N^3 (t, \alpha)$ в параметрическом виде

$$V_N^3 (\mathrm{t}, \alpha) = \sum_{i=1}^{N+2} \alpha_i \mu_i (t).$$

Пусть m_{i+1}, m_i - значения второй производной сплайна $V_N^3 (t, \alpha)$ в узлах a_{i+1}, a_i равномерной сетки с шагом

$\Delta, \left(a_{i+1}-a_i=\Delta; \quad i=0,...,N-1\right)$. Проведя вычисления по схеме п.28.3 получим на промежутке
$\left[a_i, a_{i+1}\right]$ формулу $V_N^3\left(x,\alpha\right)=$

$$= \begin{array}{l} \frac{\Delta^2}{6}\left[m_i\varphi\left(\frac{a_{i+1}-x}{\Delta}\right)+m_{i+1}\varphi\left(\frac{x-a_i}{\Delta}\right)+\left(6V_N^3\left(a_i,\alpha\right)-\Delta^2 m_i\right)\psi\left(\frac{a_{i+1}-x}{\Delta}\right)+\right. \\ +\left(6V_N^3\left(a_{i+1},\alpha\right)-\Delta^2 m_{i+1}\right)\psi\left(\frac{x-a_i}{\Delta}\right), \end{array}$$

здесь φ, ψ функции вида $\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)\ e^{-x}$, коэффициенты которых однозначно определяются из краевых условий:

$$\varphi\left(0\right)=0, \varphi^{/}\left(0\right)=0, \varphi\left(1\right)=1, \varphi^{/}\left(1\right)=3,$$

$$\psi\left(0\right)=0, \psi^{/}\left(0\right)=\psi^{/}\left(1\right), \psi^{//}\left(0\right)=0, \psi^{//}\left(1\right)=0$$

соответственно.

Выберем величины из условий сопряжения, т.е. из условий

$$\chi_i\frac{d}{dx}V_N^3\left(a_{i+1}-0\right)=\frac{d}{dx}V_N^3\left(a_i+0\right).$$

Вычислив значения производных, приходим к уравнениям:

$$\chi_i\left(\frac{\Delta}{3}m_i+\frac{\Delta}{3}m_{i+1}+\frac{V_N^3\left(a_{i+1},\alpha\right)-V_N^3\left(a_i,\alpha\right)}{\Delta}\psi^{/}\left(0\right)\right)=$$

$$=-\frac{\Delta}{3}m_{i+1}-\frac{\Delta}{3}m_{i+2}+\frac{V_N^3\left(a_{i+2},\alpha\right)-V_N^3\left(a_{i+1},\alpha\right)}{\Delta}\psi^{/}\left(0\right).$$

Таким образом, для определения $N+1$ значений получено N линейных уравнений. Еще одно уравнение дает краевое условие

$$\frac{d}{dx}V_N^3\left(a+0\right)=V_a^{/}$$

откуда получаем

$$2m_1+m_2=\frac{6}{\Delta}\left(\frac{V_N^3\left(a_1,\alpha\right)-V_N^3\left(a_0,\alpha\right)}{\Delta}-V_b^{/}\right).$$

В матричной форме записи система имеет вид $CM^*=D$, где

$C =$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1/2 & \chi_1+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \chi_2/2 & \chi_2+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-1}/2 & \chi_{N-1}+1 & 1/2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{\mathrm{N}}/2 & \chi_{\mathrm{N}}+1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{N+1} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{N+1} \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{6}{\Delta}\left(\frac{V_N^3(a_1,\alpha) - V_N^3(a_0,\alpha)}{\Delta}\psi^{/}(0) - V_a^{/}\right),$$

$$d_i = \frac{3}{\Delta^2}\left(V_N^3(a_{i+1},\alpha) - (1+\chi_i)V_N^3(a_i,\alpha) + \chi_i V_N^3(a_{i-1},\alpha)\right), i = 2, ..., N-1;$$

$$d_N = \frac{3}{\Delta^2}\left(-(1+\chi_N)V_N^3(a_N,\alpha) + \chi_N V_N^3(a_{N-1},\alpha)\right),$$

$$d_{N+1} = \frac{3}{\Delta^2}\chi_N V_N^3(a_N,\alpha).$$

Для построения фундаментальных сплайнов $\mu_1(\mathrm{t}), ..., \mu_{N+2}(t)$ удобно представить вектор $D = \begin{pmatrix} d_1 & ,\dots, & d_{N+2} \end{pmatrix}^T$ как произведение вектора V_i^T определяющих значений

$$V_i = \left(\frac{d}{dx}\left[V_m^3(a_0,\alpha)\right], V_m^3(a_0,\alpha), V_m^3(a_1,\alpha), ..., V_m^3(a_N,\alpha), 0, 0\right)^T$$

на матрицу B, которая имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\Delta} & -\frac{6}{\Delta^2} & \frac{6}{\Delta^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{3(\chi_1+1)}{\Delta^2} & \frac{3\chi_1}{\Delta^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{3(\chi_N+1)}{\Delta^2} & \frac{3\chi_N}{\Delta^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{6}{\Delta^2} & -\frac{6}{\Delta^2} & \frac{6}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Определяющими значениями фундаментальных сплайнов являются единичные векторы V_i^*, у которых единице равна координата с номером фундаментального сплайна. Упорядочим фундаментальные сплайны таким образом, чтобы матрица определяющих значений стала единичной. Т.е. принято такое упорядочение

$$\begin{array}{ccccc} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{N+1} & \mu_{N+2} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Матрица M значений вторых производных $N+2$ фундаментальных сплайнов

$$M = \left(\begin{array}{ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,N+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{N+2,1} & \dots & m_{N+2,N+2} \end{array} \right)$$

определяется как решение матричного уравнения

$$CM = B.$$

Зная матрицу M, легко вычислить значения фундаментальных сплайнов. Они вычисляются по формулам:

для $t \in [a_i, a_{i+1}]$

$$\mu_1(x) = m_{i,1}\varphi\left(\frac{a_{i+1}-x}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6} + m_{i+1,1}\varphi\left(\frac{x-a_i}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6} - m_{i+1,1}\psi\left(\frac{x-a_i}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6}$$
$$-m_{i,1}\psi\left(\frac{a_{i+1}-x}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6},$$

$$\mu_j(t) = m_{i,j}\varphi\left(\frac{a_{i+1}-t}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6} + m_{i+1,j}\varphi\left(\frac{t-a_i}{\Delta}\right)\frac{\Delta^2}{6} +$$
$$+\left(\delta_{i+1,j} - m_{i+1,j}\frac{\Delta^2}{6}\right)\psi\left(\frac{t-a_i}{\Delta}\right) + \left(\delta_{i,j} - m_{i+1,j}\frac{\Delta^2}{6}\right)\psi\left(\frac{a_i-t}{\Delta}\right).$$

Матрицу M можно вычислить аналитически, $M = C^{-1}B$. Для этого достаточно найти матрицу C^{-1}.

Обозначим через D_n определитель матрицы :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1/2 & \chi_1+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \chi_2/2 & \chi_2+1 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-2}/2 & \chi_{N-2}+1 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_{N-1}/2 & \chi_{N-1}+1 \\ \end{pmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по алгебраическим дополнениям элементов последнего столбца, получим рекуррентную формулу для вычисления определителя

$$D_n = (\chi_{n-1}+1)\, D_{n-1} - \frac{\chi_{n-1}}{2} D_{n-2}, D_1 = 2, D_0 = 1.$$

Используя определители D_n, вычислим элементы обратной матрицы C^{-1}. Получаем

$$c_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{2^{j-i}} \frac{D_{i-1} D_{N+2-j}}{D_{N+2}} \quad (1 < i \le j \le N+2)\,.$$

$$c_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{2^{i-j}} \frac{D_{j-1} D_{N+2-i}}{D_{N+2}} \quad (1 \le j \le i < N+2)\,.$$

$$c_{1j}^{-1} = \frac{(-1)^{1+j}}{2^{j-2}} \frac{D_{N+2-j}}{D_{N+2}} \quad (1 < j \le N+2)\,. \tag{28.12}$$

$$c_{N+2,j}^{-1} = \frac{(-1)^{N+j}}{2^{N+1-j}} \frac{D_{j-1}}{D_{N+2}} \quad (1 \le j < N+2)\,.$$

Итак, для того чтобы найти систему обобщенных кубических фундаментальных сплайнов с N сопряжениями, надо:

вычислить величины D_n ;

по формулам (28.12) получить матрицу C^{-1} размера ;

вычислить матрицу размера $(N+2)\times(N+2)$ по формуле $M = C^{-1}B$;

получить фундаментальные сплайны.

Таким образом, открывается возможность применения алгоритма упорядоченной минимизации риска [12] в классе обобщенных сплайнов для решения задач математической физики неограниченных кусочно-однородных сред.

28.5 Операторы преобразования сплайнов.

Операторы преобразования, введенные в п.28.2, громоздки в практическом применении. Ниже приводится реализация операторов преобразования на классе сплайнов $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ порядка m с N сопряжениями в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$ [12]. Справедлива

Теорема 28.2 *.Оператор преобразования P в классе сплайнов $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ порядка m с N сопряжениями в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$ можно определить как оператор, сопоставляющий сплайну $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ кусочно-однородный сплайн $V_N^m(t,\alpha)$ ($P : \tilde{V}_N^m(t,\alpha) \to V_N^m(t,\alpha)$) по правилу:*

1. в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$ сплайн $V_N^m(t,\alpha)$ непрерывен вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно;

2. в точках $l_1, l_2, ..., l_n \in I_n$ сплайн $V_N^m(t,\alpha)$ удовлетворяет условиям сопряжения вида:

$$\frac{d^{2j}}{dt^{2j}} V_N^m(l_k-,\alpha) = \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} V_N^m(l_k+,\alpha) \ , j = 0,1,2,...,\left[\frac{m}{2}\right],$$
$$\chi_k \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m(l_k-,\alpha) = \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} V_N^m(l_k+,\alpha) \ , j = 0,1,2,...,\left[\frac{m-1}{2}\right], \chi_k > 0 \ ,$$

3. выполняются условия периодичности:

$$\frac{d^j}{dt^j} V_N^m(l_0,\alpha) - \frac{d^j}{dt^j} V_N^m(l,\alpha) = \frac{d^j}{dt^j} \tilde{V}_N^m(l_0,\alpha) - \frac{d^j}{dt^j} \tilde{V}_N^m(l,\alpha), j = 0,1,2,...,m$$

Оператор P^{-1} ($P^{-1} : V_N^m(t,\alpha) \to \tilde{V}_N^m(t,\alpha)$), обратный к оператору преобразования P, можно определить по правилам:

1. в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$ сплайн $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ непрерывен вместе с производными до порядка $m-1$ включительно;

2. в точках $l_1, l_2, ..., l_n \in I_n$ сплайн $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ удовлетворяет условиям сопряжения вида:

$$\frac{d^j}{dt^j} \tilde{V}_N^m(l_k-0,\alpha) = \frac{d^j}{dt^j} \tilde{V}_N^m(l_k+0,\alpha) \ , j = 0,1,2,...,m \ ,$$

3. выполняются условия периодичности.

Оператор P^*, сопряженный к оператору преобразования P в классе сплайнов $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ порядка m с N сопряжениями в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$, можно определить как оператор, сопоставляющий сплайну $\tilde{V}_N^m(t,\alpha)$ сплайн $V_N^m(t,\alpha)$ ($P^* : \tilde{V}_N^m(t,\alpha) \to V_N^m(t,\alpha)$) по правилу:

1. в точках $a_1, a_2, ..., a_N \in I_n$ сплайн $V_N^m(t, \alpha)$ непрерывен вместе с производными до порядка $m-1$ включительно;

2. в точках $l_1, l_2, ..., l_n \in I_n$ сплайн $V_N^m(t, \alpha)$ удовлетворяет условиям сопряжения вида:

$$\frac{d^{2j}}{dx^{2j}} V_N^m(l_k-, \alpha) = \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} V_N^m(l_k+, \alpha)\ , j = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{m}{2}\right],$$
$$\frac{d^{2j+1}}{dx^{2j+1}} V_N^m(l_k-, \alpha) = \chi_k \frac{d^{2j+1}}{dx^{2j+1}} V_N^m(l_k+, \alpha)\ , j = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{m-1}{2}\right], \chi_k > 0\ ,$$

3. выполняются условия периодичности:

$$\frac{d^j}{dx^j} V_N^m(l_0) - \frac{d^j}{dx^j} V_N^m(l) = \frac{d^j}{dx^j} \tilde{V}_N^m(l_0) - \frac{d^j}{dx^j} \tilde{V}_N^m(l), j = 0, 1, 2, ..., m.$$

Доказательство. В каждой точке отрезка $[l_0, l]$, исключая точки стыка $a_1, a_2, ..., a_N$, $l_1, l_2, ..., l_n \in I_n$ имеем:

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \tilde{V}_N^m(x) = 0, \quad \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} V_N^m(x) = 0. \qquad (28.13)$$

Методом интегрирования по частям в интеграле $\int\limits_{l_0}^{l} \tilde{v}_j(t)\ \tilde{V}_N^m(t)\, dt$, с использованием условий (28.13) установим справедливость равенств:

$$\int\limits_{l_0}^{l} \tilde{v}_j(x)\ \tilde{V}_N^m(x)\, dx = \int\limits_{I_n} v_j(x)\, V_N^m(x)\, dx, j = 1, 2, ...$$

Утверждение теоремы следует из определения операторов P и P^{-1}.

28.6 Некорректные задачи измерения для кусочно-однородных сред.

Восстановление решения операторного уравнения (28.2) будем проводить в классе сплайнов, удовлетворяющих условиям сопряжения (28.1) в точках стыка. Пусть

$$\tilde{\pi}_1\left(\mathrm{t}\right), ..., \tilde{\pi}_{N+m+1}\left(t\right)$$

- система фундаментальных сплайнов на $[a, b]$ степени m с N сопряжениями [12]. Тогда для любого сплайна $\tilde{V}_N^m\left(x, \alpha\right)$ справедливо разложение:

$$\tilde{V}_N^m\left(t, \alpha\right) = \sum_{i=1}^{N+m+1} \alpha_i \tilde{\pi}_i\left(t\right),$$

где $\alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_{N+m+1}\right)$ - коэффициенты разложения сплайна $\tilde{V}_N^m\left(t, \alpha\right)$ по фундаментальной системе сплайнов.

Фундаментальный кусочно-однородный сплайн определим равенствами:

$$\pi_1\left(\mathrm{t}\right) = P\left[\tilde{\pi}_1\left(t\right)\right], ..., \pi_{n+M+1}\left(t\right) = P\left[\tilde{\pi}_{N+m+1}\left(t\right)\right]. \tag{28.14}$$

Тогда для любого кусочно-однородного сплайна $V_N^m\left(t, \alpha\right)$ справедливо разложение:

$$V_N^m\left(t, \alpha\right) = \sum_{i=1}^{N+m+1} \alpha_i \pi_i\left(t\right),$$

где $\alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_{N+m+1}\right)$ - коэффициенты разложения сплайна $V_N^m\left(x, \alpha\right)$ по фундаментальной системе кусочно-однородных сплайнов.

Приступим к построению сплайн- приближения решения уравнения (28.2). Рассмотрим образы кусочно-однородной фундаментальной системы (28.14):

$$\mu_1\left(t\right) = A\left[\pi_1\left(t\right)\right], ..., \mu_{n+m+1}\left(t\right) = A\left[\pi_{N+m+1}\left(t\right)\right]$$

и примем в качестве решения операторного уравнения (28.2) такой кусочно-однородный сплайн $V_N^m\left(t, \alpha\right)$, образ которого $F\left(t, \alpha^*\right)$ гарантирует малую величину риска [12]:

$$I\left(\alpha\right) = \int \left(y - F\left(x, \alpha\right)\right)^2 P\left(y \mid x\right) dydx.$$

Из приведенных в п.6 главы IX из [12] результатов об оценке риска $I\left(\alpha\right)$, следует

Теорема 28.3 . *Если удовлетворяется условие (см.[12] условие (7.15))*

$$\sup_{\alpha} \frac{\sqrt[p]{\int (y - F(x, \alpha))^{2p} P(y \mid x)\, dydx}}{\int (y - F(x, \alpha))^2 P(y \mid x)\, dydx} \leq \tau_N, p \geq 2,$$

то с вероятностью $1 - \eta$ одновременно для всех кусочно-однородных сплайнов с N сопряжениями выполняется неравенство:

$$I(\alpha) < \left.\left[\frac{\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \left(y_j - \sum_{p=1}^{N+m+1} \alpha_p \mu_p(x_j) \right)^2}{1 - 2\sqrt[3]{2}\, \tau_N \cdot \sqrt{\frac{(N+m+1)\left(\ln \frac{2i}{N+m+1} + 1\right) - \ln \frac{\eta}{12}}{i}}} \right]\right|_{\infty}, \qquad (28.15)$$

при этом качестве решения операторного уравнения (28.2) выберем такую кусочно-однородную сплайн-функцию, для которой достигается минимум правой части оценки (28.15).

Глава 29

Операторный метод решения некорректных задач кусочно-однородных сред

29.1 Ретроспективная задача о структуре температурного поля конечного кусочно-однородного стержня.

Задача о структуре температурного поля, в которой искомым является первоначальное распределение источников, порождающее некоторое заданное распределение температуры, приводит к сепаратной системе интегральных уравнений Фредгольма I рода:

$$\int\limits_{I_n} G(x,\xi,\beta)\, f(\xi)\, d\xi = F(x)\,, x \in I_n, \tag{29.1}$$

здесь $f(\xi)$ - неизвестная структура кусочно-однородного температурного поля, $F(x)$ - заданное распределение температурного поля в момент времени $t = \beta$, $G(x,\xi,\beta)$ - функция влияния [5].

Метод упорядоченной минимизации риска [12] может быть рекомендован для решения сепаратной системы интегральных уравнений (29.1).

Замечание. Точное решение задачи (29.1) получено в г.23.

29.2 Восстановление производной кусочно- гладкой функции.

Задачу восстановления непрерывной производной $\tilde{f}(\xi)$ функции $\tilde{F}(x)$ по эмпирическим данным следует рассматривать как задачу приближенного решения уравнения:

$$\int_{l_0}^{l} \theta(x-\xi)\,\tilde{f}(\xi)\,d\xi = \tilde{F}(x). \tag{29.2}$$

В работе [12] для решения задачи (29.2) применяется метод кусочно-полиномиальных приближений. Рассмотрим задачу восстановления кусочно-

непрерывной производной $f(x) = F^{/}(x)$ по эмпирическим данным. В точках стыка полагаем:

$$f(l_k-0) = F^{/}(l_k-0),\, f(l_k+0) = F^{/}(l_k+0),$$

причем

$$\chi_k f(l_k-0) = f(l_k+0), \quad k = 1,...,n.$$

Воспользуемся методом операторов преобразования. Пусть $\tilde{F} = P^{-1}[F]$, тогда производная $\tilde{f}(x) = \tilde{F}^{/}(x)$ - функция непрерывная на отрезке $[l_0, l]$. Таким образом, имеем:

$$\int_{l_0}^{l} \theta(x-\xi)\,\tilde{f}(\xi)\,d\xi = P^{-1}[F](x). \tag{29.3}$$

По определению сопряженного оператора P^* получим:

$$\tilde{f} = \frac{d}{dx}P^{-1}[F] = (P^*)^{-1}\frac{d}{dx}[F] = (P^*)^{-1}[f]$$

Следовательно, уравнение (29.3) можно переписать в виде:

$$\int_{l_0}^{l} \theta(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi = P^{-1}[F](x), \tag{29.4}$$

где

$$g = (P^*)^{-1}[f].$$

Таким образом, $f = P^*[g]$.

Обозначим через $V_N^m(x,\alpha)$ класс кусочно-однородных сплайнов степени m с N сопряжениями, заданный на равномерной сетке, а через $V_N^m(x,\alpha_0)$ сплайн, доставляющий минимум эмпирического функционала

$$I(\alpha) = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\left(y_j - V_N^m(x_j,\alpha)\right)^2,$$

где

$$y_j = f(x_j), j = 1, ..., i.$$

Пусть теперь определено условие, связывающее число сопряжений N с объемом выборки i, а именно $N = N(i)$. Рассмотрим последовательность кусочно-однородных сплайнов

$$V_{N(1)}^m(x,\alpha_1), ..., V_{N(i)}^m(x,\alpha_i), ... \qquad (29.5)$$

степени m, имеющих $N(1), ..., N(i)$ сопряжений и минимизирущих эмпирический риск на выборке $j = 1, ..., i, ...$ Из результатов Михальского А.И. (см.[12]) следует теорема.

Теорема 29.1 . *Если плотность $p(x)$ абсолютно непрерывна относительно равномерной и выполняются условия:*

$$N(i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty,$$

$$\frac{N^6(i)\ln i}{i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

а регрессия $F(x)$ непрерывна, дифференцируема в I_n, причем в точках стыка удовлетворяются условия сопряжения:

$$\begin{aligned}&F(l_k - 0) = F(l_k + 0)\ ,\\ &\chi_k F^{/}(l_k - 0) = F^{/}(l_k + 0)\ , \chi_k > 0,\end{aligned}$$

то последовательность

$$\frac{d}{dx}V_{N(1)}^{m}\left(x,\alpha_1\right),...,\frac{d}{dx}V_{N(i)}^{m}\left(x,\alpha_i\right),...$$

составленная из производных кусочно-однородных сплайнов (29.5) сходится с вероятностью единица в равномерной метрике к функции $f\left(x\right)$.

Глава 30

Корректные алгебры ограниченной емкости над множеством алгоритмов вычисления оценок

Рассматривается задача о выполнимости достаточных условий равномерной сходимости частот появления ошибок распознающих алгоритмов на обучающей выборке к их вероятностям для достаточно широких подклассов $U(L, A)$ алгебраического замыкания алгоритмов вычисления оценок. Получены верхние оценки классов $U(L, A)$ и скорость сходимости алгоритмов, минимизирующих функционал эмпирического риска.

30.1 Ведение

Большое количество работ посвящено изучению моделей алгоритмов распознавания с кусочно-линейными разделяющимися поверхностями и вычисления оценок, для которых исследовалась проблема полноты, впервые поставленная Ю.И. Журавлевым. Модель называется полной, если в ней для всякой конечной выборки $S_1, \ldots, S_q$ существует (корректный) алгоритм, классифицирующий все объекты $S_1, \ldots, S_q$ без ошибок . Модели алгоритмов, удовлетворяющие условию полноты, стали называть корректными. В [14] была доказана корректность линейных $\mathcal{L}(U)$ или алгебраических $U(A)$ замыканий такого рода алгоритмов. Более того, как следует из (3), алгоритм, корректный для произвольной выборки (задачи), может быть задан в специальном виде $A = R \circ r(\tilde{C})$ где

$$R = (c_1 + c_2) \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{l} b_{ij} A^k(i,j) \tag{30.1}$$

есть оператор, $r(\tilde{C})$- решающее правило, $A^k(i,j)$ - степень оператора вычисления оценок, $\beta_{ij} \in \{0,1\}$.

При этом показатель степени k равен по порядку $qlnq$ ($k \sim qlnq$). В работах Матросова В.Л. [24,25,26] ставился вопрос о возможности понижения сложностных параметров: показатель степени k и числа базовых алгоритмов L, при которых достигается абсолютно точное решение задачи распознавания Z. Там же изложены способы сокращения объема записи и количества шагов при подборе алгоритма А. В результате в работах [24,25,26] Матросовым В.Л. предложен новый вид корректного алгоритма для произвольной задачи распознавания Z.

$$A^* = R^* \circ r(c); \qquad A^* \in N^k\{M_1\}$$

где

$$k = q + l - 2, \qquad L = l(q^2 + ql - 2),$$

$M_1 \subset M-$ подмодель алгоритмов, содержащих только простейшие одноэлементные алгоритмы множеств. При этом оператор R^* задается в виде:

$$R^* = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{q} \beta_{\nu j} \left(R_j \cdot R_{\nu j} \right),$$

$\beta_{\nu j}$ -информационная матрица задачи Z .

$$R_j \circ r\left(c\right) \in N^{l-1}\left\{M_1\right\};$$
$$R_{\nu j} \circ r\left(c\right) \in N^{q-1}\left\{M_1\right\}$$

где

$$\tau \leq q - l; R_{\nu j} = R_{\nu j}\left(1\right) \cdot \ldots \cdot R_{\nu j}\left(\tau\right).$$

Таким образом, поиск корректного алгоритма может осуществляться уже в семействе параметрических алгоритмов $\{A\} = \{A(\tilde{\epsilon}, \tilde{\rho}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}, \tilde{C}, \tilde{k}, \tilde{\beta})\}$, для которых $A = R \circ r(\tilde{C})$ и R имеет вид (30.1). Задача поиска алгоритма, распознающего данную выборку, в общей постановке была рассмотрена в [14]. Согласно этому подходу, в классе решающих алгоритмов (правил) $F(x, \alpha)$ (α - набор параметров) нужно найти алгоритм, доставляющий минимум функционалу

$$R(\alpha) = \int\limits_{X,\Omega_0} [\omega - F(x,\alpha)]^2 dP(x,\omega)$$

если функция $P(x, \omega)$ не известна.

Функция $R(\alpha)$ характеризует вероятность неправильной классификации с помощью алгоритма $F(x, \alpha)$, где для каждой пары (x, ω) в пространстве (X, Ω_0) описание объекта задает x, а класс, к которому в действительности принадлежит объект x указывает ω. Считается, что число классов невелико, т.е. $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}$ задано однозначное соответствие между множеством параметров $\{\alpha\}$ некоторого пространства $\wedge$ и классом распознающих алгоритмов $\{F(x, \alpha)\}$, причем $F(x, \alpha)$ принимает те же дискретные значения, что и ω.

Пусть минимум функционала $R(\omega)$ достигается в некоторой точке $\alpha = \alpha_0$ пространства параметров $\wedge$.Тогда в качестве приближения берется значение α^*, доставляющее минимум функционалу эмпирического риска

$$R_{\ni}(\alpha) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{l} [\omega - F(x_i, \alpha)]^2 ,$$

где $(x_1, \omega_1), \ldots, (x_\delta, \omega_\delta)$- выборка, полученная в серии независимых испытаний при неизменном распределении $P(x, \omega)$. Здесь $R_{\ni}(\alpha)$ равна частоте $\upsilon(T_\alpha)$ появлений событий $T_\alpha = \{(x, \omega) \mid F(x, \alpha) \neq \omega\}$. Если $S = \{T_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$, то справедлива формула

$$R(\alpha^*) - R(\alpha_0) \leq 2 \sup_{T_\alpha \in S} \mid \upsilon(T_\alpha) - P(T_\alpha) \mid \tag{30.2}$$

Таким образом, близость значений α_0 и α^* будет гарантирована, если функция $R_{\ni}(\alpha)$ равномерно по параметру α приближает $R(\alpha)$, т.е. для любого $\epsilon > 0$

$$P\{sup \mid v(\alpha) - P(\alpha) \mid > \epsilon\} \longrightarrow 0, \delta \longrightarrow \infty$$

В [14] были получены достаточные условия равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям. При этом оказалось, что полученные условия не зависят от распределения $P(x, \omega)$ которое обычно не известно, а определяются только классом событий S.

Вывод достаточных условий связан с понятием функции роста $m^s(q)$, задаваемой как максимальное число способов разделения q точек на два класса с помощью распознающих алгоритмов $F(x, \alpha)$. В результате если $m^s(q)$ мажорируется некоторой степенной функцией, то имеет место равномерная сходимость частот появления событий к их вероятностям.

В случае семейства $\{A\} = \{A(\tilde{\epsilon}, \tilde{\rho}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}, \tilde{C}, \tilde{k}, \tilde{\beta})\}$ из этих условий вытекает следующее утверждение для всякого $\epsilon > 0$ существует δ_0 (эффективно заданное), достаточное для того, чтобы с вероятностью, близкой к единице, процедура, минимизирующая функционал эмпирического риска, выбрала распознающий алгоритм, для которого частота ошибок на выборке $\tilde{S}^{\delta_0} = (S^1, \ldots, S^{\delta_0})$ отличается от качества $R(\alpha)$ наилучшего в $\{A\}$ распознающего алгоритма $\tilde{S}^{\delta_0}$ не более чем на ϵ.

30.2 Обозначения, определения

1. Рассмотрим множество $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ допустимых объектов, где каждое множество M_i наделено полуметрикой ρ_i, для которой выполняются все аксиомы, за исключением аксиомы треугольника. Таким образом, $M = \{(a_1, \ldots, a_n)\} = \{S\}$, где $a_i \in M_i, i = 1, 2, \ldots, n$, причем существует разбиение множества M на классы:

$$M = \bigcup_{j=1}^{j} K_j$$

2. Пусть задана конечная последовательность пар

$$(S_1, \alpha(S_1)), \ldots, (S_m), \alpha(S_m)),$$

где $(S_1, \ldots, S_m)$ - произвольная совокупность (выборка) объектов из M и $S_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}), a_{ij} \in M_j, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n, a(S_i)$ - информационный вектор $(a_{i1}, \ldots, a_{il})$, составленный из нулей и единиц, где $a_{ij} = 1$ тогда, когда предикат $P_j(S_i) = (S_i \in K_j)$ истинен, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Выборку $(S_1, \ldots, S_m)$ будем называть обучающей, а последовательность (1.1)- начальной информацией и обозначать $I_0(S_1, \ldots, S_m) = I_0$.

3. Пусть $\tilde{K}_j = \{S_1, \ldots, S_m\} \cap K_j$ и $\tilde{C}K_j = \{S_1, \ldots, S_m\} \setminus K_j$. Без ограничения будем полагать, что и $\tilde{K}_j = \{S_1, \ldots, S_m\}$ и $\tilde{C}K_j = \{S_{m1+1}, \ldots, S_m\} \setminus K_j$.

4. Пусть задана конечная выборка объектов $(S^1, \ldots, S^q) = \tilde{S}^q$, подлежащих распознаванию; назовем ее рабочей. Каждый алгоритм А вычисления оценок определяется (см. [14]) в виде $A = A(\tilde{\epsilon}, \tilde{\rho}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}, \tilde{C})$, где $\tilde{\epsilon}, \tilde{\rho}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}$ - набор параметров, $A = R \circ r(\tilde{C})$, $R = R(\tilde{\epsilon}, \tilde{\rho}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$ - оператор, $\tilde{C} = (c_1, c_2)$; он применяется к начальной информации I_0 и рабочей выборке $\tilde{S}^q$, и его результатом является матрица оценок принадлежности объектов S^i классу K_j:

$$R(I_0, \tilde{S}^q) = \|\Gamma_{ij}\|_{g \times l} = \|\Gamma_j(S^i)\|;$$

$r(\tilde{C})$ - фиксированное решающее правило:

$$r(\tilde{C})\,(\| \Gamma_{ij} \|_{q\times l}) = \| b_{ij} \|_{q\times l}, \beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$$

Будем рассматривать задание операторов вычисления оценок с небольшими изменениями по сравнению с [14].

Система опорных множеств $\{\Omega_R\}$.

Случай а. Совокупность $\{\Omega_R\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Случай б. Совокупность $\{\Omega_R\}$ состоит из всех одноэлементных подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Функция близости $B(B')$. Всякому оператору R поставим в соответствие функцию близости $B(B')$, определяемую следующим образом. Пусть $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n), \epsilon_i$- неотрицательные вещественные числа и $S = (a_1, \ldots, a_n)$, $S' = (b_1, \ldots, b_n)$. Тогда в случае а

$$B'(S, S', \tilde{\epsilon}) = \theta[\epsilon_{j1} - \rho_{i1}(a_{i1}, b_{i1}] \cdot \ldots \cdot \theta[\epsilon_{ik} - \rho_{ik}(a_{ik}, b_{ik})],$$

в случае б

$$B(S, S', \tilde{\epsilon}, i) = \theta[\epsilon_i - \rho_i(a_i, b_i)] \qquad \theta(z) = \begin{cases} 1, z > 0 \\ z, z < 0 \end{cases}$$

Вычисление оценки для класса K_j по заданной системе опорных множеств $\{\Omega_R\}$. Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, где $\gamma_i = \gamma(S_i) > 0$ - веса объектов $S_i, i = 1, 2, \ldots, m, \tilde{p} = (p_1, \ldots, p_n); p_i > 0$ - вес i-го признака. Положим $p(\Omega_R) = p_{i1} + \ldots + p_{ik}$, если $\{\Omega_R\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

В случае а

$$\Gamma_j^\alpha(S) = \sum_{P_j(S_j)=a} \gamma(S_i)p(\Omega_R)B^\alpha(S_i, S, \tilde{\epsilon})$$

В случае б

$$\Gamma_j^\alpha(S) = \sum_{P_j(Sj)=\alpha} \sum_{\upsilon=1}^{n} \gamma(S_i)p_\upsilon B^\alpha(S_i, S, \tilde{\epsilon}, \upsilon)$$

$\alpha = 0, 1, B^1 = B, B^0 = 1 - B$; тогда $\Gamma_j(S) = x_i\Gamma_j^1 + x_0\Gamma_j^0$, $x_i = 0, 1$.

Класс операторов вычисления оценок будем обозначать $\{\tilde{R}\}$.

Решающее правило $r(\tilde{C})$. Здесь $\tilde{C} =< (c_{11}, c_{21}), \ldots, (c_{1l} \ldots, c_{2l}) >$, $0 < c_{1j} \leq c_{2j}$; тогда $r(\tilde{C})\,(\| \Gamma_{ij} \|_{q\times l}) = \| \beta_{ij} \|_{q\times l}$, $j = 1, 2, \ldots, l$, где $\beta_{ij} = 1$, если $\Gamma_{ij} > c_{2j}, \beta_{ij} = 0$, если $\Gamma_{ij} < c_{1j}, \beta_{ij} = \Delta$ в остальных случаях.

В множестве операторов $\{\tilde{R}\} = \{R(\tilde{\epsilon}, \tilde{p}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})\}$ определяются операции сложения, умножения и умножения на скаляр.

Пусть $R_1, R_2 \in \{\tilde{R}\}$ и $R_1(I_0, \tilde{S}^q) =\| a_{ij}^1 \|_{q\times l}$, $R_2(I_0, \tilde{S}^q) =\| a_{ij}^2 \|_{q\times l}$; b - скаляр. Определим операторы $b \cdot R_1, R_1 + R_2, R_1 \cdot R_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(b \cdot R_1)(I_0, \tilde{S}^q) =\| b \cdot a_{ij}^1 \|_{q\times l},\\
&(R_1 + R_2)(I_0, \tilde{S}^q) =\| a_{ij}^1 + a_{ij}^2 \|_{q\times l},\\
&(R_1 \cdot R_2)(I_0, \tilde{S}^q) =\| a_{ij}^1 \cdot a_{ij}^2 \|_{q\times l}\ .
\end{aligned}$$

Пусть N - натуральный ряд. Построим следующее множество операторных многочленов для всяких $k, L \in N$

$$\tilde{U}(L, k) = \{R \mid R = \left(\sum_{i=1}^{L} c_i R_i\right)^k; R_i \in \{\tilde{R}\}, c_i - \text{константы}\},$$

и пусть для всякого натурального $t \leq L$

$\tilde{U}(L, k) = \{R \mid (\exists l_1) \ldots (\exists l_t) \left[R = \sum_{i=1}^t \tilde{c}_i R_i, \sum_{i=1}^t l_i = L\right]$, где $R_i \in \tilde{U}(l_i, k), \tilde{c}_i$ -константы$\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. В частности, $\tilde{U}_1(L, k) = \tilde{U}(L, k)$. Тогда положим

$$\tilde{U}(L, k) = \bigcup_k \bigcup_{i=1,2,\ldots,L} \tilde{U}_t(L, k).$$

Очевидно, $\tilde{U}(L, k) \subset U(R)$, где $U(R)$ - алгебраическое замыкание операторов $\{\tilde{R}\}$.

30.3 Постановка задачи

Пусть задана рабочая выработка $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^q)$ и начальная информация $I_0 = I_0(S_1, \ldots, S_m)$. Задача $Z(I_0, \tilde{S}^q) = Z(I_0, S^1, \ldots, S^q)$ состоит в построении алгоритма, вычисляющего информационную матрицу $\| \alpha_{ij} \|_{q\times l}$, где $\alpha_{ij} = P_j(S^i)$. Результатом применения алгоритма вычисления оценок A к задаче $Z(I_0, \tilde{S}^q)$ является $A(I_0, S^1, \ldots, S^q) = \| \beta_{ij} \|_{q\times l}$ - матрица, интерпретируемая следующим образом: если $\beta_{ij} \in \{0, 1\}$, то β_{ij} - значение предиката $P_j(S^i)$, вычисленное алгоритмом A, а если

Определение 30.1. Алгоритм A называется корректным для задачи Z, если $A(I_0, S^1, \ldots, S^q) = \| a_{ij} \|_{q\times l}$, где $\| a_{ij} \|_{q\times l}$, - истинная информационная матрица для выборки $\tilde{S}^q$.

Определение 30.2. Класс алгоритмов $\{A\}$ называется корректным для множества задач Z, если для любой задачи $Z \in \{Z\}$ существует алгоритм $A \in \{A\}$, корректный для $\{Z\}$.

Пусть $U(A)$ (или $\tilde{U}(A, L)$) - множество алгоритмов таких, что $A = P \circ r(\tilde{C})$, где $R \in U(R)$ (или $R \in \tilde{U}(R, L)$). В работе [14] рассматривался класс всех задач $\{Z\}$, определенных выше, с незначительными ограничениями и была доказана

Теорема 30.1 .*Алгоритмическое замыкание $U(A)$ алгоритмов вычисления оценок с множеством распознающих алгоритмов $\{A\} = \{\tilde{R}\circ(\tilde{C})\}$ корректно над множеством задач $\{Z\}$.*

В [14] доказано, что для всякой задачи $Z = (I_0, \tilde{S}^q)$ искомый корректный алгоритм A может быть задан в специальном виде (1), где

$$R = (c_1 + c_2) \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{l} \beta_{ij} [A'(i, j)]^k,$$
$$\beta_{ij} \in \{0, 1\}, k \in N, c_1 = \min_j c_{1j}, c_2 = \max_j c_2,$$

$A'(i, j)$ - операторы из линейного замыкания $\mathcal{L}(\tilde{R})$ класса $\{\tilde{R}\}$

Докажем следующую лемму.

Лемма 30.1 . *Алгоритм вида (30.1) принадлежит классу $\tilde{U}(A, L)$ при*

$$L = ql(2q + l \cdot 3)$$

Доказательство. В [14] оператор $A'(i,j)$ строился введением вспомогательных операторов

$$R_j = \sum_{t\neq j}^{l} R_{jt}, \quad R_i^j = \sum_{v\neq j}^{q} R_{jv}^j, \quad R_{jt}, R_{jv}^j \in \{\tilde{R}\},$$

либо

$$R_i^j = \sum_{v\neq j}^{q} (R_{jv}^{j1} - R_{jv}^{j2}), \quad R_{jv}^{j1}, R_{jv}^{j2} \in \{\tilde{R}\}.$$

Тогда $R'(i,j)$ получался умножением на константу оператора $R_{ij} = R_j + R_i^j$. Следовательно, $R_j \in \tilde{U}(l-1,1), R_i^j \in \tilde{U}(2(q-1),1), R_{ij} \in \tilde{U}(2q+l-3,1)$.

Отсюда $A' \in \tilde{U}_{ql}(ql(2q+l-3),k)$, или $A' \in \tilde{U}(R, ql(2q+l-3))$.

Перейдем теперь к поиску корректного алгоритма для произвольной задачи Z в классе алгоритмов $U(A,L)$.

Рассмотрим алгебраическое замыкание алгоритмов вычисления оценок $U(A)$. Каждый алгоритм имеет вид $A = R \circ r(\tilde{C})$, где

$$R = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} c(i_1,\ldots,i_p) R_{i1}^{\alpha_1} \ldots R_{ip}^{\alpha_p}, v = 1,2,\ldots,p \tag{30.4}$$

$R_{iv} \in \{\tilde{R}\}, a_v \in N, c(i_1,\ldots,i_p)$ - константы. Причем R_{iv} для всякого $v = 1,2,\ldots,\rho$ задается набором параметров $\tilde{p}_v, \tilde{\gamma}_v, \tilde{\epsilon}_v, \tilde{x}_v$ и поэтому каждому алгоритму $A \in U(A)$ можно сопоставить, в соответствии с (30.4),набор параметров

$$< \{c(i_1,\ldots,i_p)\}, (\tilde{p}_{i_1}, \tilde{\gamma}_{i_1}, \tilde{\epsilon}_{i_1}, \tilde{x}_{i_1}), \ldots, (\tilde{p}_{i_p}, \tilde{\gamma}_{i_p}, \tilde{\epsilon}_{i_p}, \tilde{x}_{i_p}) >$$

В результате всякому алгоритму $A \in U(A)$ соответствует функция $A(S,\alpha)$, которую он вычисляет. Если $S \in \{S\}$- допустимый объект, то $A(S,\alpha) = j$ тогда и только тогда, когда значение предиката $P_j(S)$, вычисленное этим алгоритмом, равняется единице. В дальнейшем будем отождествлять алгоритм A и функцию $A(S,\alpha)$.

В [14] в качестве функционала качества работы алгоритма $A(S,\alpha)$ рассматривается

$$\hat{R}(\alpha) = \int \theta\{[\omega - A(S,\alpha)]^2\} dP(S,\omega), \tag{30.5}$$

где $P(S,\omega) = P(S)P(\omega \mid S), P(S)$ - вероятность возникновения ситуации (объекта) S и $P(\omega \mid S)$- вероятность отнесения объекта S к классу с номером $\omega \in \{1, 2, \dots, l\}$. Тогда функционал $\hat{R}(\alpha)$ задает вероятность неправильной классификации с помощью алгоритма и возникает задача отыскания алгоритма $A(S,\alpha)$. доставляющего минимум функционалу $\hat{R}(\alpha)$. Причем функция $P(S,\omega)$ считается неизвестной, но дана случайная и независимая выборка (обучающая) (30.1).

Задана также рабочая выборка $\tilde{S}^q = (S^1, \dots, S^q)$, найденная согласно распределению при случайных и независимых испытаниях:

$$(S^1, \alpha(S^1)), \dots, (S^q, \alpha(S^q)).$$

Информационные векторы $\alpha(S^i), i = 1, 2, \dots, q$, считаются неизвестными.

По лемме 30.1, корректный алгоритм, распознающий выборку $\tilde{S}^q$ и использующий обучающую последовательность пар (30.1), принадлежит классу $\tilde{U}(A,L) \subset U(A)$ при L удовлетворяющем (30.2). Однако данный класс $\tilde{U}(A,L)$ зависит от длины выборки q поэтому нет гарантии, что мы находимся в условиях детерминистской [14] постановки задачи обучения распознавания образов, хотя, очевидно, класс $U(A,L)$ содержит алгоритм, безошибочно классифицирующий все объекты $\tilde{S}^q$. В связи с этим будем рассматривать стохастический вариант [14] задачи распознавания образов. В данном случае задача сводится к отысканию алгоритма $A(S,\alpha)$,минимизирующего функционал

$$\hat{R}_0(\alpha) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}[\omega - A(S^i,\alpha)]^2, \tag{30.6}$$

где $\alpha(S^1) = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{il}), \alpha_{iw_i} = 1$.

Пусть минимумы функционалов (30.5) и (30.6) достигаются, соответственно, в точках α^* и α_0. Тогда мерой близости α^* и α_0 служит $\rho(\alpha^*, \alpha_0) - \hat{R}(\alpha_0) - \hat{R}(\alpha^*)$ и, как следует из (30.2), близость значений может быть гарантирована, если $\hat{R}(\alpha_0)$ равномерно по параметру α приближает $\hat{R}(\alpha_0)$. Обозначим

$$T_\alpha = \{(S,\omega) \mid A(S,\alpha) \neq \omega\}. \tag{30.7}$$

Тогда функционал $\hat{R}(\alpha)$ при каждом значении α есть вероятность события (30.7):

$$\hat{R}(\alpha) = P\{\mid A(S,\alpha) \neq \omega\} = P(T_\alpha).$$

Эмпирическая оценка $\hat{R}(\alpha_0)$ равна частоте $v(T_\alpha)$ появления этого события в данной выборке. Обозначим $\mathcal{F}$ класс событий T_α при любых α. Тогда равномерная близость функций $\hat{R}(\alpha)$ и $\hat{R}_0(\alpha)$ означает равномерную близость частот и вероятностей событий T_α по классу $\mathcal{F}$.

В [14] получены достаточные условия равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям, не зависящие от функции распределения. Прежде чем их сформулировать, дадим необходимые определения.

Определение 30.3. Классификацией выборки $\tilde{S}^\delta$ назовем всякое ее представление в виде двух не пересекающихся множеств $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$, т.е. $\tilde{S}_1 = \{S^{t_1}, \ldots, S^{t_k}, \tilde{S}_2\} = \{S^{t_{k+1}}, \ldots, S^{t_\delta}\}$, где $\tilde{S}_i \bigcap \tilde{S}_2 = \emptyset$. Классификацию выборки $\tilde{S}^\delta$ будем обозначать $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$; $r(\tilde{C})$ - фиксированное решающее правило, задаваемое константами c_1 и c_2 $(c_1 > c_2)$.

Определение 30.4. Будем говорить, что оператор R (алгоритм $A(S,\alpha)$ реализует классификацию $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ выборки $\tilde{S}^\delta$ по классу K_j, если для всяких объектов $S^t \in S_1$ и $S^{t'} \in S_2$ оценки оператора (значения алгоритма $A(S,\alpha)$) удовлетворяют условиям $\Gamma^R_{tj} > c_1$, $\Gamma^R_{t'j} < c_2, A(S^t,\alpha) = J, A(S^{t'},\alpha) \neq J$.

Пусть задан класс алгоритмов $\{A(S,\alpha)\}$ и соответствующей ему класс событий $\mathcal{F}(\mathcal{S},\alpha) = \{\mathcal{T}_\alpha\}$, а также зафиксирована выборка $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^q)$.

Определение 30.5. Индексом системы $\mathcal{F}(S,\alpha)$ относительно выборки $\tilde{S}^\delta$ будем называть число классификаций выборки $\tilde{S}^\delta$, реализуемых алгоритмами из $\{A(S,\alpha)\}$, и обозначать это число

$$E_{\mathcal{F}(S,\alpha)}(S^1, \ldots, S^q) = E_{\mathcal{F}}\tilde{S}^q.$$

Очевидно, $E_{\mathcal{F}}\tilde{S}^q < 2^q$.

Определение 30.6. Функцией роста класса $\{A(s,\alpha)\}$называется

$$m_{\mathcal{F}}(q) = \max_{(S^1,\ldots,S^q)} E_{\mathcal{F}(\mathcal{S},\alpha)}(S^1, \ldots, S^q)$$

Из теоремы, полученной в [14], вытекает одна важная характеристика класса алгоритмов. Сформулируем ее.

Теорема 30.2 .*Функция роста $m_{\mathcal{F}}(q)$ либо тождественно равна 2^q , либо мажорируется степенной функцией $1.5q^{n-1}/(n-1)!$, где n - минимальное число q, при котором $m_{\mathcal{F}}(q) \neq 2^q$.*

Как следует из этой теоремы, число $n-1$ служит мерой разнообразия класса $\{A(S,\alpha)\}$.

Определение 30.7. Будем называть это число емкостью класса $\{A(S,\alpha)\}$ и обозначать $\Delta_A(S,\alpha)$.

Если $m_{\mathcal{F}}(q)=2^q$ для всякого q то емкость считается бесконечной, в противном случае - конечной. Тогда конечная емкость класса $\{A(S,\alpha)\}$ является достаточным условием равномерной сходимости частот появления событий класса $\mathcal{F}(\mathcal{S},\alpha)$. к их вероятностям.

В качестве класса $\{A(S,\alpha)\}$ будем рассматривать класс алгоритмов $\tilde{U}(A,L)$. В дальнейшем докажем конечную емкость класса $\tilde{U}(A,a)$ для всякого $L\in N$.

30.4 Вспомогательные построения

Пусть $\tilde{S}^\delta=(S^1,\dots,S^\delta)$, $\tilde{S}_m=(S_1,\dots,S_m)$, где $S^i=(a_{i1},\dots,a_{in})$, $i=1,2,\dots,\delta$, $S_j=(b_{j1},\dots,b_{jn}), j=1,2,\dots,m$. Следуя [14], применим обозначение $\rho_r(a_{ij},b_{jr})=\rho(r,j,i)$, а также $\tilde{\delta}=(1,2,\dots,\delta), m_2=m-m_1$.

Рассмотрим отображения

$$\Phi_{rk}(I_0,\tilde{\delta})=(t^k_{r1},\dots,t^k_{r\delta}), k=1,2,\dots,m_1, r=1,2,\dots,n, \tag{30.8}$$

$$\Phi_{rp}(I_0,\tilde{\delta})=(\alpha^p_{r1},\dots,\alpha^p_{r\delta}), p=1,2,\dots,m_2,$$

такие, что

$$\rho(r,k,t^k_{r1}\le\dots\le(\rho(r,k,t^k_{r\delta}) \tag{30.9}$$

$$\rho(r,m_1+p,\alpha^p_{r1}\ge\dots\ge\rho(r,m_1+p,\alpha^p_{r\delta}).$$

В результате обозначения Φ_{rk} и Φ_{rp} порождают матрицы подстановок набора $\tilde{\delta}$:

$$\left\|t^1_{ri}\right\|_{n\times\delta}=\left\|\begin{matrix} t^1_{11} & \dots & t^1_{1\delta}\\ \dots & \dots & \dots\\ t^1_{n1} & \dots & t^1_{n\delta}\end{matrix}\right\|,\dots,\|t^{m_1}_{ri}\|_{n\times\delta}=\left\|\begin{matrix} t^{m_1}_{11} & \dots & t^{m_1}_{1\delta}\\ \dots & \dots & \dots\\ t^{m_1}_{n1} & \dots & t^{m_1}_{n\delta}\end{matrix}\right\|, \tag{30.10}$$

$$\left\|\alpha^1_{ri}\right\|_{n\times\delta}=\left\|\begin{matrix} \alpha^1_{11} & \dots & \alpha^1_{1\delta}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha^1_{n1} & \dots & \alpha^1_{n\delta}\end{matrix}\right\|,\dots,\|\alpha^{m_2}_{ri}\|_{n\times\delta}=\left\|\begin{matrix} \alpha^{m_2}_{11} & \dots & \alpha^{m_2}_{1\delta}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha^{m_2}_{n1} & \dots & \alpha^{m_2}_{n\delta}\end{matrix}\right\|.$$

Выборку $\tilde{S}^\delta$ будем называть выборкой общего типа, если все неравенства (30.9) являются строгими. Тогда отображения (30.8) являются однозначными. В дальнейшем будем рассматривать только выборки общего типа.

Рассмотрим r-е строки матриц (30.10):

$$t(r,k) = (t^k_{r1}, \ldots, t^k_{r\delta}), \alpha(r,k) = (\alpha^p_{r1}, \ldots, \alpha^p_{r\delta}). \tag{30.11}$$

Определим величины

$$f^\epsilon_{t(r,k)}(x) = \prod_{j=1}^{x} \theta[\epsilon - \rho(r,k,t^k_{ri})], \tag{30.12}$$

$$g^\epsilon_{a(r,k)}(x) = \prod_{j=1}^{x} \theta[\epsilon - \rho(r,k,\alpha^p_{ri})], \bar{\theta}(z) = 1 - \theta(z).$$

Обозначим

$$z(r,k) = \min_x [f^{\epsilon_r}_{t(r,k)}(x+1) = 0 \vee x = \delta], \tag{30.13}$$

$$l(r,p) = \min_x [g^{\epsilon_r}_{a(r,p)}(x+1) = 0 \vee x = \delta].$$

Очевидно, $z(r,k), l(r,p) \in \{0, 1, \ldots, \delta\}$.

Определение 30.8. $\tilde{\epsilon}$-Сечением выборки $\tilde{S}^\delta$ (относительно начальной информации I_0) будем называть пару матриц вида

$$F_1(I_0, \tilde{\epsilon}, \tilde{S}^\delta) = \left\| \begin{array}{ccc} z(1,1) & \ldots & z(1,m_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z(n,1) & \ldots & z(n,m_1) \end{array} \right\|,$$

$$F_2(I_0, \tilde{\epsilon}, \tilde{S}^\delta) = \left\| \begin{array}{ccc} l(1,1) & \ldots & l(1,m_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l(n,1) & \ldots & l(n,m_2) \end{array} \right\|.$$

Зафиксируем начальную информацию I_0 и выборку $\tilde{S}^\delta$.Введем бинарное отношение на множестве всех операторов $\{\tilde{R}\} = \{R(\tilde{\epsilon}, \tilde{x})\}$.

Пусть задана система одноэлементных опорных множеств $\{\Omega\} = \{t\}$.

Определение 30.9. Будем говорить, что операторы $R_1 = R(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{x}_1)\}$, $R_2 = R(\tilde{\epsilon}_2, \tilde{x}_2)$ с системой Ω находятся в отношении $\underset{\sim}{1}(R_1 \underset{\sim}{1} R_2)$, если

$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ и $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$ (сечения выборки $\tilde{S}^q$) совпадают, т.е. $F_i(I_0, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{S}^\delta) = F_i(I_0, \tilde{\epsilon}_2, \tilde{S}^\delta), i = 1, 2.$

Заметим, что данное определение не зависит от значений $\tilde{\gamma}_i, \tilde{p}_i$. Нетрудно видеть, что указанное отношение является отношением эквивалентности. Будем называть его 1-эквивалентностью и класс 1-эквивалентности, порождаемый оператором $R \in \{\tilde{R}\}$, обозначать $G_1(R, \Omega)$.

Пусть задано опорное множество $\Omega = \{i_1, \dots, i_k\}$. Рассмотрим подматрицы матриц (30.10), полученные вычеркиванием из (30.10) строк с номерами $r \in \{i_1, \dots, i_k\}$:

$$\left\|t^1_{ri}\right\|_{k\times\delta} = \left\| \begin{array}{ccc} t^1_{i_i 1} & \dots & t^1_{i_1\delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ t^1_{k_1 1} & \dots & t^1_{i_k\delta} \end{array} \right\|, \dots, \left\|t^1_{ri}\right\|_{k\times\delta} = \left\| \begin{array}{ccc} t^{m_1}_{i_i 1} & \dots & t^{m_1}_{i_1\delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ t^{m_1}_{k_1 1} & \dots & t^{m_1}_{i_k\delta} \end{array} \right\|,$$

$$\left\|\alpha^1_{ri}\right\|_{k\times\delta} = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha^1_{i_i 1} & \dots & \alpha^1_{i_1\delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^1_{k_1 1} & \dots & \alpha^1_{i_k\delta} \end{array} \right\|, \dots, \left\|\alpha^2_{ri}\right\|_{k\times\delta} = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha^{m_2}_{i_i 1} & \dots & \alpha^{m_2}_{i_1\delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{m_2}_{i_k 1} & \dots & \alpha^{m_2}_{i_k\delta} \end{array} \right\|$$

bf Определение 30.10. $\tilde{\epsilon}$-Сечением выборки $\tilde{S}^\delta$, согласованным с $\Omega'(\Omega'\tilde{\epsilon}$ -сечением), будем называть пару матриц

$$F_1^{\Omega'}(I, \tilde{\epsilon}, \tilde{S}^\delta) = \left\| \begin{array}{ccc} z(i_1, 1) & \dots & z(i_1, m_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ z(i_k, 1) & \dots & z(i_k, m_1) \end{array} \right\|,$$

$$F_2^{\Omega'}(I, \tilde{\epsilon}, \tilde{S}^\delta) = \left\| \begin{array}{ccc} l(i_1, 1) & \dots & l(i_1, m_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ l(i_k, 1) & \dots & l(i_k, m_2) \end{array} \right\|$$

и обозначить его $< F_1^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}), < F_2^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}) >$.

Тогда операторы $R_1 = R_1(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{x}_1), R_2 = R_2(\tilde{\epsilon}_2, \tilde{x}_2) \in \{\tilde{R}\}$ с опорным множеством Ω' будем называть 1-эквивалентными, если $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ и $\Omega'\tilde{\epsilon}_1$- и $\Omega'\tilde{\epsilon}_2$ - сечения совпадают:

$$< F_1^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}_1), F_2^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}_1) >=< F_1^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}_2), < F_2^{\Omega'}(\tilde{\epsilon}_2) >$$

Класс операторов $R \in \{\tilde{R}\}$, 1-эквивалентных по Ω' , обозначим $G_1(R, \Omega')$

Таким образом, множество операторов $\{\tilde{R}\}$ распадается на классы эквивалентности: пусть

$$\{\tilde{R}^1\} = \bigcup_{(\tilde{\epsilon},\tilde{x})} G_1(R,\Omega), \{\tilde{R}^2\} = \bigcup_{\tilde{\epsilon},\tilde{x}} \left[\bigcup_{\Omega'} G_1(R,\Omega)\right],$$

тогда $\{\tilde{R}\} = \{\tilde{R}^1\} \cup \{\tilde{R}^2\}$. Рассмотрим, соответственно, $\chi[G_1(R,\Omega)]$ и $\chi[G_1(R,\Omega')]$ - число классов эквивалентности множеств $\{\tilde{R}^1\}$ и $\{\tilde{R}^2\}$.

Имеет место

Теорема 30.3 *Верны неравенства*

$$\chi[G_1(R,\Omega)] \leq 3(m\delta+1)^n + 1 \tag{30.14}$$

$$\chi[G_1(R,\Omega')] \leq \sum_{k=1}^{n} c_n^k[3(m\delta+1)+1] \tag{30.15}$$

bf Доказательство. Рассмотрим строки r-е строки (30.11) при $k = 1, 2, \ldots, m_1$, $p = 1, 2, \ldots, m_2, r = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим из них последовательность всех элементов таких строк. Обозначим $t_{ri}^{m_1+p} = \alpha_{ri}^p$ и образуем для последовательности

$$t(r,1), \ldots, t(r,m_1), \alpha(r,1), \ldots, \alpha(r,m_2) \tag{30.16}$$

следующую постановку:

$$\begin{pmatrix} t_{r1}^1 & \ldots & t_{r\delta}^1 & \ldots & t_{r1}^{m_1} & \ldots & t_{r\delta}^{m_1} & \ldots & t_{r1}^m & \ldots & t_{r\delta}^m \\ \varphi(t_{r1}^1) & \ldots & \varphi(t_{r\delta}^1) & \ldots & \varphi(t_{r1}^{m_1}) & \ldots & \varphi(t_{r\delta}^{m_1}) & \ldots & \varphi(t_{r1}^m) & \ldots & \varphi(t_{r\delta}^m) \end{pmatrix} \tag{30.17}$$

где φ - инъективное отображение последовательности (30.16), определяемое следующим образом. Обозначим $\varphi(t_{ri}^k) = t_{r\underline{\varphi}(k,i)}^{\bar{\varphi}(k,i)}$, и пусть

$$(l,j) = (\bar{\varphi}(k,i), \underline{\varphi}(k,i)),$$

$$(l,j) = \begin{cases} \bar{\varphi}(k,i+1), \underline{\varphi}(k,i+1), & i = 1, 2, \ldots, \delta-1, k = 1, 2, \ldots, m, \\ \bar{\varphi}(k+1), 1), \underline{\varphi}(k+1,1), & i = \delta, k = 1, 2, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Тогда

$$\rho_0 = \rho(r, \bar{\varphi}(1,1), \underline{\varphi}(1,1)) = \min_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,\delta}} \rho(r,i,j), \tag{30.18}$$

$$\rho(r,l',j') - \rho(r,l,j) = \min_{\substack{l''\in(1,2,\ldots,m)\setminus(l)\\ j''\in(1,2,\ldots,\delta)\setminus(j)}} \{\rho \mid \rho(r,l'',j'') - \rho(r,l,j) \geq 0\}. \quad (30.19)$$

Определим предикат:

$$\mathcal{P}_r(\epsilon,l,j,l',j') = (\epsilon \in [\rho(r,l,j), \rho(r,l'',j'')]).$$

Тогда, по (30.17), (30.18), (30.12), для всякой пары $\epsilon', \epsilon'' > 0$, на которых значения истинности предиката $\mathcal{P}$ при любых фиксированных l, j, l', j' совпадают, выполняются равенства

$$f^{\epsilon'}_{t(r,k)}(x) = f^{\epsilon''}_{t(r,k)}(x), g^{\epsilon'}_{\alpha(r,p)}(x) = g^{\epsilon''}_{\alpha(r,p)}(x)$$

для любого натурального x. Следовательно, по (30.13), ϵ', ϵ'' - сечения выборки $\tilde{S}^\epsilon$ совпадают. Рассмотрим

$$\rho_1 = \min_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ j=1,2,\ldots,\delta}} \rho(r,i,j)$$

и предикат

$$P_r(\epsilon) = \vee_{l,j,l',j'} \mathcal{P}_r(\epsilon,l,j,l',j'),$$

тогда $\mathcal{P}_r(\epsilon) = (\epsilon \in [\rho_0, \rho_1])$. Множество элементов $M_r = \{\rho(r,i,j) \mid i \in 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,\delta\}$ расположим в порядке возрастания. Тогда элементы такой возрастающей последовательности образуют разбиение отрезка $[\rho_0, \rho_1]$ причем каждый отрезок разбиения совпадает с некоторым отрезком вида $[\rho(r,l,j), \rho(r,l',j')]$. Поскольку число ненулевых векторов $\tilde{x}$ равно трем и $\mid M_r \mid = m\delta$, $\mid \{\Omega\} \mid = n$, то исходя из определений 30.8 и 30.9 получаем оценку (30.14).

Так как число различных одноэлементных опорных множеств мощности k равно C^k_h , то, используя доказательство (30.14) и определение 30.10, получаем (30.15).

Следствие. Общее число χ классов эквивалентности по системам опорных множеств $\{\Omega\}$ и $\{\Omega'\}$ ограничено сверху:

$$\chi \leq 2^n[3(m\delta+1)^n + 1]. \quad 30.20$$

Действительно, из (30.16), (30.17) следует, что

$$\chi = \chi[G_1(R,\Omega)] + \chi[G_1(R,\Omega')] \leq 3(m\delta+1)^n + 1 + (2^n - 1)[3(m\delta+1)^n + 1]$$

$$= 2^n[3(m\delta+1)^n + 1]$$

30.5 Основная теорема

Введем обозначение $G_1(R)$ для класса 1-эквивалентности с произвольной системой опорных множеств $\{\Omega\}$ или $\{\Omega'\}$.

Поставим в соответствие каждому объекту S^t рабочей выборки $\tilde{S}^\delta$ и каждому классу $G_1(R)$ булев вектор

$$\mathcal{G}_t[G_1(R)] = (\mathcal{G}_t^1, \dots, \mathcal{G}_t^m) \tag{30.20}$$

следующим образом. Пусть $R \in G_1(R)$ и $R = R(\tilde{\epsilon})$.

Случай 1. $G_1(R) = G_1(R, \Omega)$ Тогда $\mathcal{G}_t^i = (\mathcal{G}_{i1}^t, \dots, \mathcal{G}_{in}^t), i = 1, 2 \dots, m$, $\mathcal{G}_{ir}^t = B(S_t, S^t, \tilde{\epsilon}, r)$, $i = 1, 2, \dots, m_1$, $\mathcal{G}_{ir}^t = \bar{B}(S_t, S^t, \tilde{\epsilon}, r)$, $i = m_1 + 1, \dots, m$, $r = 1, 2, \dots, n$.

Случай 2. $G_1(R) = G_1(R, \Omega'), \Omega' = \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда при $r \in \Omega'$

$$\mathcal{G}_{ir}^t = B(S_t, S^t, \tilde{\epsilon}, r), i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$\mathcal{G}_{ir}^t = \bar{B}(S_t, S^t, \tilde{\epsilon}, r), i = m_1 + 1, \dots, m,$$

$$\begin{cases} \mathcal{G}_t^1 = \prod\limits_{r \in \Omega'} \mathcal{G}_{ir}^t, i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \mathrm{sign}(\sum\limits_{r \in \Omega'} \mathcal{G}_{ir}^t), i = m_1 + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Определение (30.10) дано полностью. Заметим, что $\mathcal{G}_t^i \in \{0, 1\}$ в случае 2, в то время как $\mathcal{G}_t^i$ есть n- мерный булев вектор в случае 1.

Из определения (30.10) следует, что число различных векторов не превосходит 2^{mm} в случае 1 и 2^m в случае 2.

Определение 30.11. Векторы $\mathcal{G}_1[G_1(R, \Omega)]$ и $\mathcal{G}_1[G_1(R, \Omega')]$ будем называть характеристическими для объекта S^t относительно классов эквивалентности $G_1(R, \Omega)$ и $G_1(R, \Omega')$.

Лемма 30.2 *Для всех объектов S^{t_1} и S^{t_2} выборки $\tilde{S}^\delta$ с одинаковыми характеристическими векторами ($\mathcal{G}_{t_1}$ $[G_1(R, \Omega)] = \mathcal{G}_{t_2}[G_1(R, \Omega)]$) для любого оператора $R_0 = G_1(R)$ оценки, доставляемые оператором R_0 совпадают: $\Gamma_{t_1 j}^{R_0} = \Gamma_{t_2 j}^{R_0}$*

Доказательство. Для случая 1 при $R_0 = R_0(\tilde{\epsilon})$ поскольку ($\mathcal{G}_{t_1}$ $[G_1(R, \Omega)] = \mathcal{G}_{t_2}[G_1(R, \Omega)]$), векторы

$$< B^\alpha(S_j, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, 1), \dots, B^\alpha(S_j, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, n) >$$

$$< B^\alpha(S_j, S^{t_2}, \tilde{\epsilon}, 1), \dots, B^\alpha(S_j, S^{t_2}, \tilde{\epsilon}, n) >$$

по определению (30.11) равны при $j = 1, 2, \dots, m, \alpha = 0, 1$. Следовательно,

$$\Gamma^1_{t_1 j} = \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{r=1}^{n} p_r \gamma_j B(S_t, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, r) = \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{r=1}^{n} p_r \gamma_j B(S_t, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, r) = \Gamma^1_{t_2 j}$$

$$\Gamma^0_{t_1 j} = \sum_{j=m_1+1}^{m} \sum_{r=1}^{n} p_r \gamma_j \bar{B}(S_t, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, r) = \sum_{j=m_1+1}^{m} \sum_{r=1}^{n} p_r \gamma_j \bar{B}(S_t, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, r) = \Gamma^0_{t_2 j}.$$

Для случая 2, по определению (30.11) $\mathcal{G}^i_{t_1} = \mathcal{G}^i_{t_2}, i = 1, 2, \dots, m$, то есть

$$\prod_{r \in \Omega'} G^{t_1}_{jr} = \prod_{r \in \Omega'} G^{t_2}_{jr}, j = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$\mathrm{sign}(\sum_{j=m_1+1}^{m} \mathcal{G}^{t_1}_{ir}) = \mathrm{sign}(\sum_{j=m_1+1}^{m} \mathcal{G}^{t_2}_{ir});$$

тогда

$$\Gamma^1_{tj} = \sum_{j=1}^{m_1} p(\Omega') \prod_{r \in \Omega'} B(S_j, S^{t_1}, \tilde{\epsilon}, r) = \sum_{j=1}^{m_1} p(\Omega') \prod_{r \in \Omega'} \mathcal{G}^{t_1}_{jr} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} p(\Omega') \prod_{r \in \Omega'} \mathcal{G}^{t_2}_{jr} = \sum_{j=1}^{m_1} p(\Omega') \prod_{r \in \Omega'} B(S_j, S^{t_2}, \tilde{\epsilon}, r).$$

Аналогично

$$\Gamma^0_{t_1 j} = \sum_{j=m_1+1}^{m} p(\Omega') \mathrm{sign}(\sum_{r \in \Omega'} \mathcal{G}^{t_1}_{jr}) = \sum_{j=m_1+1}^{m} p(\Omega') \mathrm{sign}(\sum_{r \in \Omega'} \mathcal{G}^{t_2}_{jr}) = \Gamma^0_{t_2 j}$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основной теоремы, гарантирующей конечную емкость класса алгоритмов $\tilde{U}(A, L)$.

Теорема 30.4 *Для всякого $L \in N$ существует такое δ , что любая выборка $\tilde{S}^\delta$ имеет классификацию $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ не реализуемую никаким оператором $R \in \tilde{U}(R, L)$.*

bf Доказательство. Предположим противное: пусть существует такое L, что для любого δ всякая классификация $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ выборки $\tilde{S}^\delta$ реализуется некоторым оператором $R \in \tilde{U}(R, L)$. В силу определения класса $\tilde{U}(R, L)$ всякий оператор из этого класса представляет собой операторный многочлен вида

$$R = \tilde{C}_1 \left(\sum_{i=1}^{l_1} c_i R_i \right)^k + \tilde{C}_2 \left(\sum_{i=l_1+1}^{l_1+l_2} c_i R_i \right)^k + \ldots +$$
$$+ \tilde{C}_g \left(\sum_{i=l_1+\ldots+l_{g-1}+1}^{l_1+\ldots+l_g} c_i R_i \right)^k . \qquad (30.21)$$

Введем следующее отношение эквивалентности (L-эквивалентности) на множестве всех операторов из $\tilde{U}(R, L)$. Пусть дан также оператор

$$R' = \sum_{j=1}^{t} C_j \left(\sum_{i=l'_1+\ldots+l'_{g-1}+1}^{l'_1+\ldots+l'_g} c'_i R'_i \right)^k$$

из класса $\tilde{U}(R, L)$. Будем говорить, что операторы R и R' являются L-эквивалентными $(R \overset{L}{\sim} R')$, если $R_i \overset{1}{\sim} R'_i)$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, L$. В результате класс $\tilde{U}(R, L)$ разбивается на классы эквивалентности, которые обозначим $G_L(R)$

Из данного определения следует, что каждый класс порождается оператором

$$R_0 = \sum_{i=1}^{L} R_i \qquad (30.22)$$

В силу (30.20), число классов L-эквивалентности не превосходит

$$\{2^n[3(m\delta + 1)^n + 1]\}^L < 2^{L(n+2)}(m\delta + 1)^{Ln} \qquad (30.23)$$

Рассмотрим произвольный класс $G_L(R)$ порождаемый (30.22) , где каждый оператор $R_i = G_1(R_i)$. При этом для всякого $t = 1, 2, \ldots, \delta$ объекту S^t соответствует булев вектор $\mathcal{G}_t[G_L(R)] =< \mathcal{G}_t[G_1(R_L)] >$, который назовем обобщенным характеристическим вектором объекта относительно класса $G_L(R)$. Легко видеть, что число различных обобщенных векторов для класса $G_L(R)$ не превосходит

$$2^{mnL}. \qquad (30.24)$$

Заметим, что если $\mathcal{G}_{t_1}[G_1(R)] = \mathcal{G}_{t_2}[G_L(R)]$ для некоторых $t_1 \neq t_2$, то $\mathcal{G}_{t_1}[G_1(R_i)] = \mathcal{G}_{t_1}[G_1(R_i)]$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, L$ и, следовательно, оценки, доставляемые операторами R_i по классу K_j для объектов S^{t_1} и S^{t_2}, совпадают, т.е. $\Gamma_{t_1 j}^{R_i} \neq \Gamma_{t_2 j}^{R_i} =$. Поэтому оценки, доставляемые всяким оператором R вида (30.21), для данных объектов равняются, соответственно,

$$\Gamma_{t_1 j}^{R} = \sum_{j=1}^{g} \tilde{C}_j \left(\sum_{i=l_1+\ldots+l_{j-1}+1}^{l_1+\ldots+l_j} c_j \Gamma_{t_1 j}^{R_i} \right), \tag{30.25}$$

$$\Gamma_{t_2 j}^{R} = \sum_{j=1}^{g} \tilde{C}_j \left(\sum_{i=l_1+\ldots+l_{j-1}+1}^{l_1+\ldots+l_j} c_j \Gamma_{t_2 j}^{R_i} \right), \Gamma_{t_1 j}^{R} = \Gamma_{t_2 j}^{R}$$

Рассмотрим последовательность обобщенных характеристических векторов для объектов выборки $\tilde{S}^\delta$. Тогда, по условию (30.24), в этой последовательности найдется не менее $[\delta/2^{mnL}]$ совпадающих векторов, т.е. существуют натуральные $\tau_1, \ldots, \tau_{CR} \in [1, \delta]$ такие, что $c_R \geq [\delta/2^{mnL}]$ и $\mathcal{G}_{t_1}[G_L(R)] = \mathcal{G}_{t_{CR}}[G_L(R)]$. Введем следующее множество классификаций выборки $\tilde{S}^\delta$:

$$\mathcal{M}[R]_L = \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) \mid \exists r \exists p (r, p = 1, 2, \ldots, c_R) \times [(S^{\tau_r} \in \tilde{S}_1) \& (S^{\tau_p} \in \tilde{S}_2)]\}.$$

Подсчитаем число элементов данного множества:

$$\mathcal{M}[R]_L = (2^{C_R} - 2) 2^{\delta - C_R} = 2^\delta - 2^{\delta - C_R + 1}.$$

Указанное равенство следует из того, что число всех подмножеств множества $\mathcal{M}_1 = \{S^{\tau_1}, \ldots, S^{\tau_{C_R}}\}$, отличных от пустого и от всего множества $\mathcal{M}[R]_L$ равно $2^{C_R} - 2$, а число подмножеств множества $\tilde{S}^\delta \setminus \mathcal{M}_1$ равно $2^{\delta - C_R}$

В силу предположения, сделанного в начале доказательства, следует, что каждая из 2^δ-классификаций выборки реализуется некоторым оператором из подходящего класса L-эквивалентности. Тогда, по (30.23), следует, что существует не менее $[2^\delta / 2^{L(n+2)} (m\delta + 1)^{Ln}]$ классификаций, реализуемых посредством операторов $R \in \tilde{U}(R, L)$ принадлежащих одному и тому же классу $G_L(R_0)$.

Пусть Ω - множество всех таких классификаций. Докажем, что $\Omega \cap \mathcal{M}[R_0]_L \neq \emptyset$. Действительно, число классификаций выборки $\tilde{S}^\delta$, не принадлежащих множеству $\mathcal{A}$, не превосходит

$$2^\delta \{1 - [1/2^{L(n+2} (m\delta + 1)^{Ln}]\}.$$

С другой стороны

$$| \mathcal{M}[R_0]_L |= 2^{\delta}[1 - 1/2^{C_{R_0}-1}] > 2^{\delta}\{1 - [1/2^{L(n+2)}(m\delta + 1)^{Ln}]\}.$$

Данное неравенство выполняется для достаточно больших δ , точнее:

$$2^{C_{R_0}-1} \geq 2^{[\delta/2^{mnL}]-1} > 2^{L(n+2)}(m\delta + 1)^{Ln}.$$

Последнее верно, если $[\delta/2^{mnL}] - 1 > L(n + 2) + Ln \cdot \log_2(m\delta + 1)$, или

$$\delta > 2^{mnL}[Ln \cdot \log_2(m\delta + 1) + L(n + 2) + 1]. \qquad (30.26)$$

Но отсюда следует, что существует классификация $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \in \mathcal{M}[R_0]_L$ принадлежащая Ω. По определению $\mathcal{M}[R_0]_L$ существуют хотя бы два объекта $S^{\tau_r} \in \tilde{S}_1$ и $S^{\tau_p} \in \tilde{S}_2$, для которых $\mathcal{G}_{t_r}[G_L(R_0)]$ $=\mathcal{G}_{t_p}[G_L(R_0)]$, но по (30.25) оценки $\Gamma_{\tau_r j}$ и $\Gamma_{\tau_p j}$ доставляемые всяким оператором из класса $G_R(R_0)$, совпадают, т.е. $\Gamma_{\tau_r j} = \Gamma_{\tau_p j}$ Но это невозможно, так как $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 = \emptyset$. Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим множество операторных многочленов $\tilde{U}'(R, L)$ имеющих вид (30.21) , где для всех $i = 1, 2, \ldots, L$ оператор R_i имеет систему опорных множеств $\{\Omega\} = \{i\}$. Тогда в формулировке теоремы 30.4 вместо класса $\tilde{U}(R, L)$ можно рассматривать класс $\tilde{U}'(R, L)$ и оценка (27.26) меняется следующим образом:

$$\delta > 2^{mnL}[Ln \cdot \log_2(m\delta + 1) + 2L + 1] \qquad (30.27)$$

Действительно по (30.14) число классов L-эквивалентности не превосходит $[3(m\delta+1)^n+1]^L < 2^{2L}(m\delta+1)^{Ln}$. В то же время оценка (30.24) остается неизменной. Тогда, разрешая неравенство $2^{\delta/2mnL-1} > 2^{2L}(m\delta+1)^{Ln}$ относительно δ, получаем (30.27).

Пусть $\mathcal{F}(S, \alpha)$ - класс событий (30.7) соответствующий классу алгоритмов $\tilde{U}(A, L)$; тогда из теоремы 30.4 вытекает оценка емкости $\Delta_A(S, \alpha)$ класса $\tilde{U}(A, L)$.

Следствие . Верно неравенство

$$\Delta_A(S, \alpha) \leq \min\{\delta \mid \delta > 2^{mnL}[Ln \cdot \log_2(m\delta + 1) + 2L + 1]\} \qquad (30.28)$$

Получим теперь оценку сверху для $\Delta_A(S, \alpha)$ в более удобной форме.

Теорема 30.5 *Емкость класса алгоритмов $\tilde{U}(A, L)$ ограничена сверху.*

$$\Delta_A = (S, \alpha) \leq 4^{mnL+2}.$$

bf Доказательство. Пусть задана рабочая выборка ;$\tilde{S}^\delta$ такая, что $\delta = 4^{mnL+2}$. В частности, $m\delta + 1 < \delta^2$, а также $2L + 1 \leq 2mnL + 1$,$Ln + 1 \leq 2mnL$; тогда $Ln[\log_2(m\delta + 1]2L + 1 < mnL(2\log_2 \delta + 1) + 2mnL + 1 \leq 4(mnL)^2 + 11mnL + 1 \leq 2^{mnL+4}$. Последнее неравенство для всех m, n и $L = 1, 2, \ldots$. Используя также оценку (30.27) и равенство (30.28) $4^{mnL+2} = 2^{mnL+4} \cdot 2^{mnL}$, получаем (30.27). Применим полученный результат для оценки длины выборки $\{S_1, \ldots, S_m\}$, достаточной для обучения в задаче распознавания. Следуя [14], будем считать, что длины рабочей и обучающей выборок совпадают, т.е.$\tilde{S}^\delta = (S^1, \ldots, S^\delta)$ и $\tilde{S}_\delta = (S_1, \ldots, S_\delta)$.

Пусть также $\tilde{S}^\delta$ и $\tilde{S}_\delta$ получены в серии независимых испытаний и задан класс алгоритмов $\{A(S,)\}$, имеющий емкость $\Delta_A(S, \alpha)$.

Теорема 30.6 *(см.[14]). Для того чтобы с вероятностью, большей* $1-\eta$ *, частота ошибок распознающего алгоритма* $A \in \{A(S, \alpha)\}$ *на обучающей и рабочей выборках различалась менее чем на* ϵ *достаточно, чтобы длина выборок удовлетворяла условию*

$$\delta = \frac{2\Delta_A(S, \alpha}{\epsilon^2}\left[1 - \frac{ln(\eta/5) - (\epsilon^2/2)}{\Delta_A(S, \alpha} - ln\frac{\epsilon^2}{2}\right].$$

Из теорем 30.5 и 30.6 вытекает

Теорема 30.7 *Для всякого* $0 < \eta < 1$ *и* $\epsilon > 0$ *для того, чтобы с вероятностью, большей* $1 - \eta$ *частота ошибок распознающего алгоритма* $A \in \tilde{U}(A, L)$ *на обучающей и рабочей выборках различалась менее чем на* ϵ, *достаточно, чтобы длина обучающей выборки* $\tilde{S}_Q$ *удовлетворяла условию*

$$Q \geq \frac{2^{2mnL+3}}{\epsilon^2}\left[1 - \left(\ln\frac{\eta}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}\right)2^{-(2mnL+3} - \ln\frac{\epsilon^2}{2}\right].$$

Глава 31

О неполноте модели алгоритмов вычисления оценок

Доказано, что линейное замыкание $\mathcal{L}(A)$ алгоритмов вычисления оценок некорректно над множеством регулярных задач и, следовательно, модель таких алгоритмов неполна. Однако для класса эффективно отделимых задач $\{Z\}$ относительно заданной системы опорных множеств $\{\Omega\}$ класс алгоритмов $\mathcal{L}(A)$ является корректным. Строится контрпример, показывающий, что условие эффективной отделимости задач не является необходимым для корректности $\mathcal{L}(A)$.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности линейного замыкания $\mathcal{L}(A)$ алгоритмов вычисления оценок, а следовательно, вопросу о полноте такого класса алгоритмов. Алгоритмы вычисления оценок задаются в форме, принятой в [14], с тем добавлением, что в классе системы опорных множеств таких алгоритмов рассматривается более широкая совокупность подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (n - число признаков).

В [14] была доказана корректность алгебраического замыкания алгоритмов вычисления оценок. С другой стороны, в [14] исследовалась корректность линейного замыкания таких алгоритмов, причем было доказано, что при некотором расширении данного класса алгоритмов (элементарного (γ, β)-расширения) его корректность достигается. Однако вопрос о корректности самого класса алгоритмов оставался открытым. В нашей работе на него дается отрицательный ответ. Формулируются достаточные условия для множества регулярных [14] задач $\{Z\}$, при которых $\mathcal{L}(A)$ оказывается корректным для $\{Z\}$. Поскольку емкость корректного подкласса $\mathcal{L}(A)$ оказывается ограниченной, то задача поиска алгоритма, безошибочно распознающего данную выборку, решается положительно на основании [14].

31.1 Предварительные определения

В основном сохранена терминология работ [14], [14]. Напомним некоторые определения и обозначения. Начальную информацию будем записывать в виде $I_0 = \{(S_1, \ldots, S_m); (\alpha(S_1), \ldots, \alpha(S_m))\}$, где $(S_1, \ldots, S_m)$ - произвольная выборка допустимых объектов, называемая обучающей, $(\alpha(S_1), \ldots, \alpha(S_m))$ - последовательность информационных векторов о принадлежности объектов выборки к классам K_j, где объединение всех таких классов представляет собой все множество допустимых объектов

$$\bigcup_{i=1}^{l} K_j = M = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

Пусть дана выборка допустимых объектов $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^q)$,подлежащих распознаванию. Назовем ее рабочей; $\mathbf{R}_+$ - множество всех положительных действительных чисел. Под алгоритмом вычисления оценок будем понимать $A = R \circ r(C)$, где R - распознающий оператор, задаваемый набором своих параметров $R = R(\rho, \gamma, \epsilon, x), p \in R_+^n, \gamma \in R_+^m, \epsilon \in (R_+ \bigcup\{0\} \bigcup\{-1\})^n, x \in \{0,1\}^2; R(I_0, \tilde{S}^q) = \| \ \Gamma_{ij} \ \|_{q\times l} = \|\Gamma_i(S^i)\|_{q\times l}$, где $\Gamma_{ij} = \Gamma_i(S^i)$ - оценка S^i по классу $K_j, r(C)$ - фиксированное решающее правило, определяемое набором констант $\mathcal{C}_1(j), \mathcal{C}_2(j), j = 1, 2, \ldots, l$:

$$C_2(j) \geq C_1(j) > 0, r(C)(\|\Gamma_{ij}\|_{q\times l}) = \|\beta_{ij}\|_{q\times l}, \beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$$

Здесь

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если}\, \Gamma_{ij} < C_1(j), \\ 1, \text{если}\, \Gamma_{ij} > C_1(j), \\ \Delta, \text{если}\, C_1(j) \leq \Gamma_{ij} \leq C_1(j). \end{cases}$$

Множество всех операторов вычисления оценок обозначим через $\{R\}$.

Опорные множества алгоритма А (оператора R). Каждому алгоритму A (оператору R) сопоставляется совокупность опорных множеств $\{\Omega_A\}$, где $\Omega_A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Будем рассматривать следующие системы Ω_A

1)совокупность $\{\Omega_A\} = \{(i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$;

2)совокупность $\{\Omega_A\}$ опорных множеств состоит из одного опорного множества Ω_A;

3)совокупность $\{\Omega_A\}$ состоит из всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ мощности k, где $1 \leq k \leq n$;

4)совокупность $\{\Omega_A\}$ состоит из подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ произвольной природы.

В [14] исследовались алгоритмы с системами опорных множеств 1), 2), а в [14] - с системой 3).

Обозначим класс алгоритмов (операторов), имеющих в качестве системы опорных множеств $\{\Omega_A\}$ совокупность $\{i\}$ через $\{A_i\}$ (или $\{R_i\}$),$i = 1, \dots, 4$, и пусть $\{A_{12}\} = \{A_1\} \cup \{A_2\}, \{A_{123}\} = \{A_3\} \cup \{A_{12}\}$, $\{A_2(1)\} = \{A \mid A \in \{A_2\} \& A = A(\rho, \gamma, \epsilon, x)$ где $\rho = (1, \dots, 1)\}$. Соответствующие обозначения будем использовать для классов операторов. В дальнейшем согласно [14], класс алгоритмов $\{A\}$, заданный параметрически, будем называть также моделью.

Под задачей $Z(I_0, \tilde{S}^q)$ будем понимать построение алгоритма A из заданного множества алгоритмов $\{A\}$ вычисляющего информационную матрицу $\|a_{ij}\|_{q\times l}$, где $\alpha_{ij} = P_j\{S^i)$ и $P_j(S)$ - предикат принадлежности объекта S классу K_j. В дальнейшем будем рассматривать множество всех регулярных задач z, определенных в [14].

Определение 31.1. Алгоритм A называется корректным для задачи $Z = Z\{I_0, \tilde{S}^q)$, если $A\{I_0, \tilde{S}^q) = \|a_{ij}\|_{q\times l}$, $\|a_{ij}\|_{q\times l}$ - истинная информационная матрица выборки $\tilde{S}^q$.

Определение 31.2. Класс алгоритмов $\{A\}$ называется корректным для множества задач $\{Z\}$, если для любой задачи $Z \in \{Z\}$ существует алгоритм $A \in \{A\}$,корректный для Z.

Пусть $\{\Omega\}$ - некоторая система подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим через $A_2\{\Omega\}$ класс алгоритмов, состоящий из всех алгоритмов класса $\{A_2\}$, имеющих в качестве опорных множеств множества из $\{\Omega\}$.

Определение 31.3. Приведенной системой для $\{\Omega\}$ назовем наибольшее подмножество $\{\Omega'\} \subset \{\Omega\}$ такое, что для всякого $\Omega_1 \in \{\Omega'\}$ не существует $\Omega_2 \in \{\Omega'\}, \Omega_2 \subset \Omega_1$. Приведенную систему для $\{\Omega\}$ будем обозначать $\{\pi\Omega\}$.

Пусть $\{\Omega\}$ - система опорных множеств для класса алгоритмов $\{A_4\}$. Тогда верна

Лемма 31.1 *Справедливы соотношения:*

$$\mathcal{L}\{A_4\} \subset \mathcal{L}\{A_2(1)\} \tag{31.2}$$
$$\mathcal{L}\{A_4\} \supset \mathcal{L}\{A_2(\pi\Omega)\} \tag{31.3}$$
$$\mathcal{L}\{A_3\} \supset \mathcal{L}\{A_2\} \tag{31.4}$$
$$\mathcal{L}\{A_{123}\} \subset \mathcal{L}\{A_2(1)\} \tag{31.5}$$

Доказательство. Пусть задан оператор $R(\rho, \gamma, \epsilon, x) \in \{R_4\}$ вместе с некоторой системой опорных множеств $\{\Omega\}$, которую занумеруем в произвольном порядке

$$\{\Omega\} = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_r\}, \Omega_i = \{l_1, \ldots, l_{k(i)}\}, i = 1, 2, \ldots, r, \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n).$$

И пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ - последовательность булевых векторов, соответствующая (см. [1])$\{\Omega_i\}$. Согласно [14], оценка принадлежности к классу K_j допустимого объекта задается в виде $\Gamma_j(S^0) = \Gamma_{j1}(S^0) + \Gamma_{j0}(S^0)$,где

$$\Gamma_{i1}(S^0) = \sum_{S_i \in \bar{K}_j} \gamma_i \sum_{(\omega_v)} p(\omega_v) B(\omega_v S^0, \omega_v S_i, \epsilon) =$$

$$\sum_{S_i \in \bar{K}_j} \gamma_i [p(\omega_1) B(\omega_1 S^0, \omega_1 S_i, \epsilon)] + \ldots + \sum_{S_i \in \bar{K}_j} \gamma_i [p(\omega_r) B(\omega_r S^0, \omega_r S_i, \epsilon)],$$

$$\Gamma_{i0}(S^0) = \sum_{S_i' \in C\bar{K}_j} \gamma_{i'} [p(\omega_1) \bar{B}(\omega_1 S^0, \omega_1 S_{i'}, \epsilon)] + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{S_i' \in C\bar{K}_j} \gamma_{i'} [p(\omega_r) \bar{B}(\omega_r S^0, \omega_r S_{i'}, \epsilon)]$$

Определим операторы $R_i^1 = R_i^1(p, \gamma^{i1}, \epsilon^{i1}, x^{i1}) \in \{R_2(1)\}$, $t = 1, 2, \ldots r$ следующим образом:

$$\Omega_{R_i} = \Omega_i, \epsilon^{i1} = (\epsilon_1^{i1}, \ldots, \epsilon_n^{i1}), \epsilon_{l1}^{i1} = \epsilon_{l_1}^{i1}, \ldots, \epsilon_{l_{k(i)}}^{i1} = \epsilon_{l_{k(i)}},$$

$$v \notin \{l_1, \ldots, l_{k(i)}\}, x^{i1} = (1, 0), \gamma^{1i} = \gamma, \epsilon_v^i > \max_{S_p \in \bar{K}_j} \rho(v, p, 0).$$

Операторы $R_i^0 = R_i^0(p, \gamma^{i0}, \epsilon^{i0} x^{i0}) \in \{R_2(1)\}$. Опорные множества - как у R_i^1 при $\gamma^{i0} = \gamma$:

$$\epsilon^{i0} = (\epsilon_1^{i0}, \ldots, \epsilon_1^{i0}), \epsilon_{l1}^{i0} = \epsilon_{l_1}, \ldots, \epsilon_{l_{k(i)}} = \epsilon_{l_{k(i)}},$$
$$\epsilon_v > \max_{S_{p'} \in \bar{K}_j} \rho(v, p', 0), x^{i0} = (0, 1).$$

Тогда, в силу построения операторов R_i^1 и R_i^0,

$$R = \sum_{I=1} \frac{p\,(\omega_t)}{n}(R_t^1 + R_t^0)$$

а следовательно, $\mathcal{L}\{A_4\}$ $\mathcal{L}\{A_2(1)\}$, откуда $R = \mathcal{L}\{A_2(1)\}$.

Докажем включение (31.3). Пусть задан оператор $R = R(p, \gamma, \epsilon, x) \in \{R_2\}$ вместе с опорным множеством $\Omega' = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Оценка оператора R для каждого допустимого объекта S^0 задается в виде

$$\Gamma_j(S^0) = x_1 \sum_{S_i \in \bar{K}_j} \gamma_i p(\omega) B(\omega S^0, \omega S_i, \epsilon) + x_0 \sum_{S_{i'} \in \bar{K}_j} \gamma_{i'} p(\omega) \bar{B}(\omega S^0, \omega S_i, \epsilon)$$

где $x = (x_1, x_2), \omega \leftrightarrow \Omega'$.

Определим операторы $R_i(p^i, \gamma^i, \epsilon^i, x^i), i = 1, 2,$ в классе $\{A_4\}$:

$$p^i = p, \gamma^i = \gamma, \epsilon^i = (\epsilon_1^i, \ldots, \epsilon_n^i), \epsilon_{i_j}^i = \epsilon_{i_j}, j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\epsilon_v^1 = -1, \epsilon_v^2 \geq \max_{S_{i'} \in C\bar{K}_j} \rho(v, i', 0) \quad v \notin \Omega, x^1 = (1, 0), x^0 = (0, 1)$$

Пусть $\omega, \omega^1, \ldots, \omega^i$ - последовательность булевых векторов, соответствующая всем множествам системы опорных множеств $\{\Omega\}$ класса $\{A_4\}$.Тогда оценка объекта S^0 , доставляемая оператором R_1 имеет вид

$$\Gamma_j^1(S^0) = \sum_{S_i \in \bar{K}_j} \gamma_i \left[p(\omega) B\left(\omega S^0, \omega S_i, \epsilon^1\right) + \sum_{r=1}^{t} p(\omega)^r B\left(\omega^r S^0, \omega^r S_i, \epsilon^1\right) \right].$$

В силу определения приведенной системы $\{\pi\Omega\}$, для каждого $r = 1, 2, \ldots, t$ существует индекс $\xi \notin \Omega'$, для которого $\omega_\xi = 0, \omega_\xi^r = 1$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ и $\omega^r = (\omega_1^r, \ldots, \omega_n^r)$, но тогда, по построению оператора R_1, имеем $B(\omega^r S^0, \omega^r S_i, \epsilon^1) = 0$. Аналогично, для $r = 1, 2, \ldots, t$ существует индекс $\xi \notin \Omega'$, для которого $\omega_\xi = 0, \omega_\xi^r = 1$, и так как, по построению оператора $R_2, \epsilon_\xi^2 \geq \rho(\xi, i', 0)$, то $B\left(\omega^r S^0, \omega^r S_t', \epsilon^2\right) = 1$. А значит,$\Gamma_j(S^0) = \Gamma_j^1(S^0) + \Gamma_j^2(S^0)$, следовательно, $\mathcal{L}\{A_4\} \supset \mathcal{L}\{A_2\{\pi\Omega\}\}$,

Если теперь в качестве $\{A_4\}$ рассмотреть класс $\{A_3\}$, то для его системы опорных множеств $\{\Omega\} = \{\pi\Omega\}$ и поэтому $\{A_2\} = \{A_2\{\pi\Omega\}\}$, отсюда, по (31.3), $\mathcal{L}\{A_3\} \supset \mathcal{L}\{A_2\}$, но, по (31.2), имеем $\mathcal{L}\{A_3\} = \mathcal{L}\{A_2\}$, а соотношение (31.5) вытекает из (31.2) и (31.4) . Лемма доказана.

Пусть задано множество допустимых начальных информаций $\{I_0\}$.

Определение 31.4. Модель $\mathcal{M}$ называется полной, если для любых $I_0 = \{I_0\}, q = 1, 2, \ldots,$ и выборки $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^q)$ множество матриц $\left\{R(I_0, \tilde{S}^q) \mid A = R \circ r(C) \in \mathcal{M}\right\}$ содержит базис в пространстве числовых матриц размерности $q \times l$.

Поскольку здесь рассматривается фиксированное корректное решающее пра-вило, то из данного определения и теоремы, доказанной в [14], вытекает, что полнота модели $\mathcal{M}$ влечет корректность ее линейного замыкания $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Напомним некоторые определения, данные в [14].

Определение 31.5. Классификацией выборки $\tilde{S}^q$ назовем всякое ее представление в виде объединения двух непересекающихся множеств $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$, т. е. $\tilde{S}_1 = \{S^{t_1}, \ldots, S^{t_k}\}$, $\tilde{S}_2 = \{S^{t_{k+1}}, \ldots, S^{t_q}\}$, $\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 = \tilde{S}^q$, $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 \neq 0$.

Классификацию выборки $\tilde{S}^q$ будем обозначать $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$.

Определение 31.6. Оператор R (алгоритм $A = R \circ r(C)$) реализует классификацию выборки $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ по классу K_j, если для всяких объектов $S^i \in \tilde{S}_1$ и $S^{i'} \in \tilde{S}_2$ оценки оператора R удовлетворяют неравенствам $\Gamma_{ij} > C_2(j), \Gamma_{i'j} > C_1(j)$, где $C_1(j)$ и $C_2(j)$ определены в (31.1).

Определение 31.7. Алгоритм A назовем корректным по классу K_j или просто j-корректным для задачи $Z = Z(I_0, \tilde{S}^q)$, если j-й столбец матрицы $A(I_0, \tilde{S}^q)$ совпадает с j-м столбцом истинной информационной матрицы задачи Z.

Определение 31.8. Класс алгоритмов $\{\tilde{A}\}$ назовем j-корректным над множеством задач $\{\tilde{Z}\}$, если для всякой задачи $Z \in \{\tilde{Z}\}$ и для всякого $j = 1, 2, \ldots, l$ существует алгоритм $A(j) \in \{\tilde{A}\}$, j-корректный для Z.

В дальнейшем будем использовать понятие изоморфизма допустимых объектов, данное в [14].

31.2 Основная теорема

Теорема 31.1 *Модель алгоритмов вычисления оценок неполна.*

Доказательство. Построим задачу, для которой найдется классификация соответствующей выборки, не реализуемая никаким оператором из $\mathcal{L}(R)$. Рассмотрим в качестве множества допустимых объектов E^3 трехмерное евклидово пространство со стандартной метрикой расстояния ρ. Пусть задано некоторое разбиение E^3 на два класса: $E^3 = K_1 \cup K_2$, причем $\tilde{K}_1 = \{S_1, \ldots, S_{m_1}\}$ и $\tilde{K}_2 = \{S_{m_1}, \ldots, S_m\}$, где объекты S_i и $S^i, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условиям: $S^j \notin \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$,

$$S_i = (x^i, y^i, z^i), t = 1, 2, \ldots, m, x^1 = \ldots = x^{m_1} \neq x^{m_1+1} = \ldots = x^m, \quad (31.6)$$

$$y^1 = \ldots = y^{m_1} \neq y^{m_1+1} = \ldots = y^m, z^i = b(i-1),$$

где $b > 0$ - некоторая постоянная,

$$\begin{array}{ll} \rho(S^1, S_i) = \rho(S^2, S_i) = r_1^i > 0, & \\ \rho(S^3, S_i) = \rho(S^4, S_i) = r_2^i > 0, & i = 1, 2, \ldots, m_1, \\ \rho(S^1, S_v) = \rho(S^3, S_v) = r_1^v > 0, & \\ \rho(S^2, S_v) = \rho(S^4, S_v) = r_2^v > 0, & v = m_1 + 1, \ldots, m, \end{array} \quad (31.7)$$

$$r_1^1 < r_2^1 < r_1^2 < r_2^2 < \ldots < r_1^{m_1} < r_2^{m_1} \leq r_2^{m_1+1} < r_1^{m_1+1} < r_2^m < r_1^m.$$

Легко увидеть из условий (31.7), что объекты выборки $\tilde{S}^q$ попарно неизоморфны относительно I_0 и, следовательно, задача $Z = Z(I_0, \tilde{S}^4)$ регулярна. Рассмотрим классы операторов вычисления оценок в однопараметрическом множестве E^3, для которых $x = (1, 0)$ и $x = (0, 1)$. Обозначим их, соответственно, $\{\tilde{R}_{10}\}$ и $\{\tilde{R}_{01}\}$. Тогда класс $\{\tilde{R}_{10}\}$ распадается на $2m+1$ классов 1-эквивалентности (см. [14]) $K_t^1[R], t = 1, 2, \ldots, 2m_1+1$, определяемых, соответственно, значениями параметра

$$\epsilon = 0, r_1^1, r_2^1, \ldots, r_1^{m_1}, r_2^{m_1}.$$

Аналогично,

$$\{\tilde{R}_{01}\} = \bigcup_{t=1}^{2(m-m_1)+1} K_t^0[R],$$

где классы эквивалентности $K_t^0[R]$ определяются, соответственно, параметрами $\epsilon = 0, r_2^{m_1+1}, r_1^{m_1+1} \ldots, r_2^m, r_1^m$.

В силу условий (31.6), (31.7), для всякого оператора $R = R(p, \gamma, \epsilon, x) \in \{\tilde{R}_{10}\}$ его оценки для объектов выборки $\tilde{S}^4$ имеют вид

$$\Gamma_1(S^1) = \Gamma_1(S^2) = p(\gamma_1 + \ldots + \gamma_t), \quad (31.8)$$

$$\Gamma_1(S^3) = \Gamma_1(S^4) = p(\gamma_1 + \ldots + \alpha\gamma_t),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m), t$ - номер класса 1-эквивалентности, для которого $R \in K_t^1[R]$, $t = 2, 3, \ldots, 2m_1 + 1; \alpha = 1$, если $\epsilon \notin [r_1^t, r_2^t)$, и $\alpha = 0$ в противном случае; если же $\epsilon < r_1^1$, т.е. $R \in K_1^1[R]$, то $\Gamma_1(S^i) \equiv 0, i = 1,2,3,4$. Аналогично, рассмотрим для всякого оператора $R' \in \{\tilde{R}_{01}\}$ его оценки для $\tilde{S}^4$:

$$\Gamma_1'(S^1) = \Gamma_1'(S^3) = p(\gamma_{m_1+q} + \ldots + \gamma_m), \tag{31.9}$$

$$\Gamma_1'(S^2) = \Gamma_1'(S^4) = p(\beta\gamma_{m_1+q} + \ldots + \gamma_m),$$

q - номер такой, что $R' \in K_q^0[R]; \beta = 1$, если $\epsilon \neq [r_2^{q+m_1}, r_1^{q+m_1})$, и $\beta = 0$ в противном случае; если же $\epsilon \geq r_1^m$, то $\Gamma_1'(S^i) \equiv 0$.

Таким образом, для всякого оператора $\hat{R} \in \{R\}$из (31,8), (31.9)получаем следующие оценки для $\tilde{S}^4$:

$$\hat{\Gamma}_1(S^1) = p\left[a\sum_{i=1}^{t}\gamma_i + b\sum_{j=q}^{m-m_1}\gamma_{m_i+j}\right], \tag{31.10}$$

$$\hat{\Gamma}_1(S^2) = p\left[a\sum_{i=1}^{t}\gamma_i + b\left(\beta\gamma_{m_1+q} + \sum_{j=2}^{m-m_1}\gamma_{m_i+j}\right)\right],$$

$$\hat{\Gamma}_1(S^3) = p\left[a\left(\sum_{i=1}^{t-1}\gamma_i + \alpha\gamma_t\right) + b\sum_{j=1}^{m-m_1}\gamma_{m_1+j}\right],$$

$$\hat{\Gamma}_1(S^4) = p\left[a\left(\sum_{i=1}^{t-1}\gamma_i + \alpha\gamma_t\right) + b\left(\beta\gamma_{m_1+q} + \sum_{j=2}^{m-m_1}\gamma_{m_1+j}\right)\right],$$

Полагая

$$a\sum_{i=1}^{t-1}\gamma_i = K_1, \qquad b\sum_{j=1}^{m-m_1}\gamma_{m_1+j} = K_2,$$

$$a\left(\sum_{i=1}^{t-1}\gamma_i + \alpha\gamma_t\right) = K_3, \qquad b\left(\beta\gamma_{m_1+q} + \sum_{j=2}^{m-m_1}\gamma_{m_1+j}\right) = K_4,$$

из (31.10) имеем

$$\Gamma_1(S^1) = K_1 + K_2, \qquad \Gamma_1(S^2) = K_1 + K_4, \tag{31.11}$$

$$\Gamma_1(S^3) = K_2 + K_3, \qquad \Gamma_1(S^4) = K_2 + K_4,$$

Покажем, что классификация $\langle (S^1, S^4); (S^2, S^3) \rangle$ не реализуется никаким оператором $R \in \mathcal{L}(R)$. Пусть для данного решающего правила $r(C)$, определяемого константами $C_1, C_2, C_1 \leq C_2$, существует оператор $R \in \mathcal{L}(R)$, реализующий эту классификацию. Тогда

$$R = \sum_{i=1}^{v} c_i R_i, \text{где} R_i \in \{R\}, c_i = \text{const}$$

Используя (31.11), оценки оператора можно представить в виде

$$\Gamma_1(S^1) = \sum_{i=1}^{v} c_i(k_1^i + k_2^i), \quad \Gamma_1(S^2) = \sum_{i=1}^{v} c_i(k_1^i + k_4^i), \tag{31.12}$$

$$\Gamma_1(S^3) = \sum_{i=1}^{v} c_i(k_2^i + k_3^i), \quad \Gamma_1(S^4) = \sum_{i=1}^{v} c_i(k_2^i + k_4^i),$$

и, следовательно, по определению алгоритма вычисления оценок,

$$\Gamma_1(S^1) > C_2, \Gamma_1(S^4) > C_2, \Gamma_1(S^2) > C_1, \Gamma_1(S^3) > C_1, \tag{31.13}$$

Из (31.12), (31.13) имеем

$$\Gamma_1(S^1) + \Gamma_1(S^4) = \sum_{i=1}^{v} c_i \left(\sum_{j=1}^{4} k_j^i \right) > 2C_2,$$

$$\Gamma_1(S^2) + \Gamma_1(S^3) = \sum_{i=1}^{v} c_i \left(\sum_{j=1}^{4} k_j^i \right) > 2C_1.$$

Получили противоречие. Таким образом, $\mathcal{L}\{R\}$ некорректно над множеством регулярных задач, а значит, модель алгоритмов вычисления оценок неполна. Теорема доказана.

31.3 Алгебра, порожденная выборкой $\tilde{S}^q$

Выделим достаточные условия, при которых для произвольной выборки $\tilde{S}^q$ в линейном замыкании $\mathcal{L}\{A\}$ найдется алгоритмы, корректный для Z.Для этого осуществим некоторые вспомогательные построения.

Пусть даны выборка $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^q)$, набор $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, опорное множество $\Omega = \{i_1, \ldots, i_k\}, \Omega \leftrightarrow \omega$.

Определение 31.9. Объекты S^t и $S^v, t, v = 1, 2, \ldots, q,\ t \neq v$, называются (i, ϵ)-эквивалентными относительно Ω, если $B(\omega S_t, \omega S_i, \epsilon) = B(\omega S^t, \omega S_i, \epsilon) = P_j(S_i)$ и обозначаются $S^t \sim S^v(i, \epsilon, \Omega)$ или же $S^t \sim S^v(i, \epsilon)$, если множество Ω заранее фиксировано.

Заметим, что данное бинарное отношение является отношением эквивалентности только при фиксированных $i = 1, 2, \ldots, m, k = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 31.10. Пусть $\{\Omega\}$ - произвольная система опорных множеств. Объекты S^t и S^v назовем (i, ϵ)-эквивалентными относительно системы $\{\Omega\}$, если существует множество $\Omega \in \{\pi\Omega\}$, для которого $S^t \sim S^v(i, \epsilon, \Omega)$.

Соответствующие классы (i, ϵ)- эквивалентности обозначим $[S^v]^i_\epsilon$, т.е. $[S^v]^i_\epsilon = \{S^t \mid S^t \in \tilde{S}^q, S^t \sim S^v(i, \epsilon, \Omega)\}$.

Рассмотрим совокупность всех классов (i, ϵ)- эквивалентности относительно $\{\Omega\}$ для задачи $Z(I_0, \tilde{S}^q)$:

$$\mathcal{R} = \{[S]^i_\epsilon \mid i = 1, 2, \ldots, m; \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n), \epsilon \in (\mathbf{R}_+ \cup \{-1\})^n\}.$$

Утверждение. Для любого опорного множества $\Omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ число классов (i, ϵ)- эквивалентности не превосходит $\mid \mathcal{R} \mid \leq (q+1)^k m$.

Доказательство. Рассмотрим множества
$\mathcal{R}^i_v = \{\rho(v, i, j) \mid j = 1, 2, \ldots, q\}$, $i = 1, 2, \ldots, m, v \in \Omega$. Оставим в каждом из них только попарно различные элементы. В итоге для каждого i получим k возрастающих последовательностей элементов из множеств $\mathcal{R}^i_v$:

$$\rho(i_t, i, v_{t1}) < \rho(i_t, i, v_{t2}) < \ldots, \rho(i_y, i, v_{tp_1}).$$

Обозначим и $\mathcal{E}^i_{i_t} = \{\rho(i_t, i, v_{ij}) \mid j = 1, 2, \ldots, p_t\} \cup \{0\}, t = 1, 2, \ldots, k$, и пусть $\mathcal{E}^i = \mathcal{E}^i_{i_1} \times \ldots \times \mathcal{E}^i_{i_k}$; тогда нетрудно видеть, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ каждый класс (i, ϵ)- эквивалентности задается некоторым $\epsilon \in \mathcal{E}^i$. При этом число таких классов не превосходит $(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_k+1)m \leq (q+1)^k m$.

Всякому классу $[S]^i_\epsilon$ поставим в соответствие множество $M(i, \epsilon)$ индексов объектов выборки $\tilde{S}^q$, входящих в $[S]^i_\epsilon$. Для совокупности $F_0 = \{M(i, \epsilon) \mid i = 1, 2, \ldots, m;\ \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n); \epsilon_j \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}\}$ рассмотрим $F \subseteq F_0$ всех попарно различных элементов из F_0. Пусть $\{\tilde{\alpha}(q)\}$ - множество всех булевых векторов длины q. Зададим соответствие

$$\varphi : F \to \{\tilde{\alpha}(q)\} \tag{31.14}$$

такое, что для всякого множества $M \in F, M = \{i_1, \ldots, i_p\}$, будет $\varphi(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, где $\alpha_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i \in M$. Как следует из (31.14), соответствие φ является взаимно однозначным отображением F в $\{\tilde{\alpha}(q)\}$.

Через $G(\tilde{S}^q)$ обозначим множество всех векторов $\{\alpha \mid \alpha = \varphi(M); M \in F\}$. Введем на $\{\tilde{\alpha}(q)\}$ два бинарных отношения: $\prec$ и $\propto$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $\alpha, \beta \in \{\tilde{\alpha}(q)\}$, тогда $\alpha \prec \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, q$; в противном случае будем писать $\alpha_{\leftarrow} \prec \beta$ и $\alpha \propto \beta$, если для всякого $i = 1, 2, \ldots, q$ либо $\alpha_i \neq \beta_i$ либо $\alpha_i = \beta_i = 0$; в противном случае $\alpha_{\leftarrow} \propto \beta$. Очевидно, отношение $\propto$ симметрично. Введенным отношениям соответствуют две операции:

$$\alpha\Theta\beta = \begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_{ij} - \beta_{ij}), \text{если } \alpha \prec \beta \\ \qquad (0, \ldots, 0), \qquad \text{если } \alpha_{\leftarrow} \prec \beta \end{cases} \tag{31.15}$$

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \text{если } \alpha \propto \beta \\ \qquad (0, \ldots, 0), \qquad \text{если } \alpha_{\leftarrow} \propto \beta \end{cases}$$

В результате множество $G(\tilde{S}^q)$ вместе с операциями (31.15) порождает алгебру, которую будем обозначать через $\left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$ и называть алгеброй, порожденной выборкой $\tilde{S}^q$ относительно данной системы опорных множеств $\{\Omega\}$, где $G_0(\tilde{S}^q)$ - множество-носитель алгебры. Элементы алгебры $\left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$ с единичной нормой назовем атомарными.

31.4 Корректность $\mathcal{L}A$ над множеством эффективно отделимых задач

Рассмотрим множество алгоритмов $\{A_4\}$ и соответствующую ему систему опорных множеств $\{\Omega\}$.

Теорема 31.2 *Для всякой выборки $\tilde{S}^q$ такой, что порожденная ею алгебра $\left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$ относительно $\{\Omega\}$ содержит все атомарные элементы $\{\tilde{\alpha}(q)\}$, в линейном замыкании $\mathcal{L}A_2\{\pi\Omega\}$ существует алгоритм, j-корректный для $Z = Z(I_0, \tilde{S}^q)$.*

bf Доказательство. С этой целью построим список Ξ состоящий из пар $(\alpha, R(\alpha))$ таких, что α - элемент алгебры $\left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$, а $R(\alpha)$ - оператор, поставленный ему в соответствие определенным образом. Осуществим построение поэтапно, обозначив через $\{(\alpha, R(\alpha))\}_n$ множество элементов, включенных в Ξ на n-м этапе, а множество соответствующих ему первых и вторых компонент обозначим $\{\alpha\}_n$ и $\{R(\alpha)\}_n$. В силу определения отображения (31.14), для каждого элемента $\alpha \in G(\tilde{S}^q)$ прообраз $\varphi^{-1}(\alpha)$ является некоторым классом (i, ϵ)- эквивалентности $[S]^i_\epsilon$ для соответствующего опорного множества $\Omega = \{i_1, \dots, i_k\}, \Omega \in \{\pi\Omega\}$, параметра $\epsilon_0 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ и индекса $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Этап 1. Для всякого $\alpha \in G(\tilde{S}^q)$ определим оператор $R = R(p, \gamma, \epsilon, x)$ с опорным множеством $\Omega, R \circ r(C) \in A_2\{\pi\Omega\}$, и параметрами $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_{i_0} = Q \cdot 2^{p-1}, P = 2^q - q; x = (1, 0)$, если $S_{i_0} \in \tilde{K}_j$, и $x = (0, 1)$, если $S_{i_0} \in \tilde{C}\tilde{K}_j$ $p_r = (2^{P-1})^{-1}k, r \in \Omega$; $p_{r'}$ произвольны, $r' \notin \Omega$;$\gamma_i = 1/(m-1)Q$, $i = i_0; \epsilon = \epsilon_0$. Тогда $\left\{(\alpha, R(\alpha)) \mid \alpha \in G\left(\tilde{S}^q\right)\right\} = \{\alpha, R(\alpha)\}_1$.

Этап n. Пусть имеется часть списка, полученная до n-го этапа включительно: $\{(\alpha, R(\alpha))\}^n = \{(\alpha, R(\alpha))\}_1 \cup \ldots \cup \{(\alpha, R(\alpha))\}_n$, а также $\{\alpha\}^n = \{\alpha\}_1 \cup \ldots \cup \{\alpha\}_n, \{R(\alpha)\}^n = \{R(\alpha)\}_1 \cup \ldots \cup \{R(\alpha)\}_n$.

Этап n+1. В множестве булевых векторов $\{\alpha\}^n$ рассмотрим всевозможные пары различных элементов (α_1, β_1) и (α_2, β_2), для которых $\alpha_1 \prec \beta_1$ и $\alpha + 2 \propto \beta_2$. Вычислим $\gamma = \beta_1 \ominus \alpha_1, \delta = \alpha_2 \oplus \beta_2$. Выберем из множества полученных векторов $\{\gamma\}$ и $\{\delta\}$ векторы, не принадлежащие $\{\alpha\}^n$, если такие имеются. Для вновь присоединенных векторов γ и δ зададим операторы $R(\gamma) = R(\beta_1) - R(\alpha_1), R(\delta) = R(\beta_2) - R(\alpha_2)$. В результате получим новые множества $\{(\gamma, R(\gamma))\}$ и $\{(\delta, R(\delta))\}$. Положим $\{(\alpha, R(\alpha))\}_{n+1} = \{(\gamma, R(\gamma))\} \cup \{(\delta, R(\delta))\}$, а также $\{\alpha\}_{n+1} = \{\gamma\} \cup \{\delta\}, \{R(\alpha)\}_{n+1} = \{R(\gamma)\} \cup \{R(\delta)\}$. Описание построения списка Ξ закончено.

Очевидно, если $\{(\alpha, R(\alpha))\} = \emptyset$ для некоторого n, то $\{(\alpha, R(\alpha))\}^n_{n+1} = \emptyset$ для всякого $k \in N, N = \{1, 2, , 3 \ldots\}$

Докажем, что для всякого атомарного элемента $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_q)$, где $\alpha_i = 1$ список Ξ содержит соответствующую пару $(\alpha, R(\alpha))$, у которой для любого сколь угодно большого числа Q оценки оператора удовлетворяют условиям

$$\Gamma_j(S^i) \geq Q - 1/Q, \mid \Gamma_j(S^{i'}) \mid \leq 1/Q, \tag{31.16}$$

$$i' = 1, 2, \dots, i, i-1, i+1, \dots, q$$

Замечание. Поскольку на каждом этапе происходит добавление не менее одного ненулевого элемента алгебры $\left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$, то, очевидно, число этапов заведомо не превосходит $P = 2^q - q$, пока в списке Ξ не будет получено множество $\{\alpha\}^n$, содержащее все атомарные элементы из $\{\tilde{\alpha}(q)\}$. При этом, как следует из построения Ξ всякий оператор $R \in \{R(\alpha)\}_n$, представляет собой алгебраическую сумму не более чем 2^{n-1} операторов, принадлежащих $R(\alpha)\}_1$.

Докажем оценки (31.16) индукцией по числу этапов. Рассмотрим $n = 1$. Тогда, в силу определения этапа 1, для всякого $t \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ оценка S^t , данная оператором $R(\alpha)$ по лемме, доказанной в [14], удовлетворяет неравенствам $Q \leq \Gamma_j(S^t) \leq (2^{p-1})^{-1}(Q \cdot 2^{p-1} + 1/Q)$, или $Q \leq \Gamma_j(S^t) \leq Q + (Q \cdot 2^{p-1})^{-1}$.В то же время $0 \leq \Gamma_j(S^v) \leq Q + (Q \cdot 2^{p-1})^{-1}$ для $v \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Покажем, что для всякого элемента $(\beta, R(\beta))$ множества $\{(\alpha, R(\alpha))\}_n$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, выполняются следующие свойства. Пусть $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$- все единичные компоненты β, тогда для всякого $t \in \{j_1, \ldots, j_k\}$ оценки оператора $R(\beta)$ имеют вид

$$| \Gamma_j(S^t) - Q | \leq (Q \cdot 2^{P-n})^{-1} \tag{31.17}$$

и для $v \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$

$$| \Gamma_j(S^v) - Q | \leq (Q \cdot 2^{P-n})^{-1} \tag{31.18}$$

Предположив, что оценки (31.17), (31.18) выполняются для $n = \tau$, докажем их выполнимость для $n = \tau + 1$.

По построению списка Ξ для всякого элемента

$$(\gamma, R(\gamma)) \in \{(\alpha, R(\alpha))\}_{\tau+1}$$

имеем либо $\gamma = \beta \ominus \alpha, R(\gamma) = R(\beta) - R(\alpha), \alpha \prec \beta$, либо $\gamma = \beta \oplus \alpha, R(\gamma) = R(\beta) + R(\alpha), \alpha \propto \beta$. В обоих случаях $\alpha, \beta \in \{\alpha\}^n, R(\alpha), R(\beta) \in \{R(\alpha)\}^n$. Доказательства этих случаев аналогичны, поэтому рассмотрим лишь один из них, например первый.

Пусть $\mathcal{A} = \{i_1, \ldots, i_k\}, \mathcal{E} = \{j_1, \ldots, i_r\}$ - множества всех единичных компонент векторов γ и α соответственно. Тогда, по определению операции $\ominus$ вектор β имеет множество номеров всех единичных компонент $\mathcal{B} = \{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, i_r\}$ причем $\mathcal{E} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. По индуктивному предположению, оценки, доставляемые операторами $R(\beta)$ и $R(\alpha)$, а именно $\Gamma_j^\beta(S^t), \Gamma_j^\alpha(S^t)$, $t \in \mathcal{E}$ удовлетворяют условию (31.17), а $\Gamma_j^\beta(S^t), \Gamma_j^\alpha(S^{t'})$, $t \in \mathcal{B}, v' \notin \mathcal{E}$ - условию (31.18) при $n = \tau$. Поскольку число слагаемых в алгебраической сумме операторов, равной $R(\gamma)$, не более чем в два раза превосходит число слагаемых подобных сумм для операторов $R(\beta)$,

$R(\alpha)$, то оценка оператора $R(\gamma)$ имеет вид $\Gamma_j^\gamma(S) = \Gamma_j^\beta(S) - \Gamma_j^\alpha$ и для всякого $w \in \mathcal{A}$

$$| \Gamma_j^\gamma(S^w) - Q |\leq 2(Q \cdot 2^{P-\tau})^{-1}.$$

В случае $w' \notin \mathcal{A}$ либо $w' \notin \mathcal{E}$ либо $w' \notin \mathcal{B}$ и, по (31.17), (31.18),

$$| \Gamma_j(S^w |\leq 2(Q \cdot 2^{P-\tau})^{-1}.$$

Отсюда вытекает оценка (31.16). Таким образом, для всякого объекта S^i выборки $\tilde{S}^q$ в $\mathcal{L}\{R_2\{\pi\Omega\}\}$ существует оператор $R(\alpha)$ (где α - атомарный элемент $\{\tilde{\alpha}(q)\}$ такой, что для его оценок

$$| \Gamma_j(S^i) - Q |\leq 1/Q, \quad | \Gamma_j(S^{i'}) - Q |\leq 1/Q, \ \ i' = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, q.$$

Посредством выбора достаточно большого Q любая классификация $\tilde{S}^q$ реализуется подходящим оператором из $\mathcal{L}\{R_2\{\pi\Omega\}\}$. Теорема доказана.

Заметим, что число элементов

$$| \{R(\alpha)\}_1 |\leq \min\left[(2^n - 1)m\frac{q^{n+1} - q}{q - 1}, 2^q - 1\right].$$

Данная оценка вытекает из подсчета числа классов (i, ϵ)- эквивалентности по всем системам $\{\Omega\}$ с использованием утверждения из п. 31.3. Зафиксируем систему опорных множеств Ω.

Определение 31.11. Задачу $Z = Z(I_0, \tilde{S}^q)$ назовем эффективно отделимой, если алгебра $\mathcal{U} = \left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$, порождаемая выборкой $\tilde{S}^q$ относительно $\{\Omega\}$, содержит все атомарные элементы $\{\tilde{\alpha}(q)\}$.

Пусть задано множество алгоритмов $\{A_4\}$ вместе с системой $\{A_4\}$. Тогда из леммы 31.1 и теоремы 31.2 вытекает

Следствие 31.1. Линейное замыкание $\mathcal{L}\{A_4\}$ является j-корректным над множеством эффективно отделимых задач.

Подобное утверждение имеет место, если вместо $\mathcal{L}\{A_4\}$ рассматривать $\mathcal{L}\{A_{123}\}, \mathcal{L}\{A_3\}$, или $\mathcal{L}\{A_2\}$ с соответствующими этим классам алгоритмов системами опорных множеств.

Все последующие рассуждения будут верны одновременно для любого из классов алгоритмов $\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_4\}, \{A_{123}\}$, поэтому будем использовать обозначение для класса без индексов: $\{A\}$. Пусть $L \in N$, обозначим

$$U_L\{A\} = \left\{A \mid A = \sum_{i=1}^{L} c_i A_i; A_i \in \{A\}, c_i = \text{const}\right\}.$$

Как замечено при доказательстве теоремы 31.2, всякий оператор $R(\alpha)$ из списка Ξ представляет собой алгебраическую сумму операторов R, взятых с некоторыми коэффициентами, где $R \in \{R(\alpha)\}_1$. Следовательно, по замечанию к теореме 31.2, всякая классификация выборки $\tilde{S}^q$ реализуется оператором

$$R_0 = \sum_{i=1}^{t} c_i R_i,$$

где $R_i \in \{R(\alpha)\}_1$ и $t \leq T = \min[qm(2q)^n, 2^q]$. Отсюда вытекает

Следствие 31.2. Класс алгоритмов $U_T\{A\}$ является j-корректным над множеством эффективно отделимых задач.

Определение 31.12. Наибольшее число q, при котором существует выборка $\tilde{S}^q$ такая, что все ее классификации реализуются операторами $R \in \{R \mid R \circ r(C) \in \{A\}\}$, называется емкостью класса алгоритмов $\{A\}$, если такое q существует. В противном случае емкость считается бесконечной.

Следствие 31.3. Емкость h класса алгоритмов $U_T\{A\}$ конечна.

Доказательство вытекает из теоремы 2, доказанной в [14] , и из определения класса $U_T\{A\}$.

Следствие 31.3 гарантирует для всякой эффективно отделимой задачи $Z(I_0, \tilde{S}^q)$ существование алгоритма, минимизирующего функционал эмпирического риска по [14], т.е. процедуры, позволяющей с вероятностью, близкой к единице, отыскать алгоритм в классе $U_T\{A\}$, классифицирующий с заданной степенью точности выборки $\tilde{S}^q$.

Следствие 31.4. Емкость линейного замыкания $\mathcal{L}\{A\}$ является бесконечной.

bf Доказательство. Построим выборку сколь угодно большой длины в некотором признаковом пространстве, у которой любая классификация реализуется подходящим оператором из $\mathcal{L}\{R\}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}$ - множество действительных чисел со стандартной метрикой расстояния ρ. Пусть заданы начальная информация $I_0 = \{S_1, \ldots, S_m\}$ и выборка $\tilde{S}^q$ с произвольной информационной матрицей $\|\alpha_{ij}\|$ такая, что $\rho(S^q, S_i) > (S^{q-1}, S_i) > \ldots > (S^1, S_i) > 0$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда алгебра $\mathcal{U} = \left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$ содержит все атомарные элементы из $\{\tilde{\alpha}(q)\}$ и задача $Z(I_0, \tilde{S}^q)$ является эффективно отделимой для класса $\{A\}$ и, по следствию 31.2, $\mathcal{L}\{A\}$ корректно для $Z(I_0, \tilde{S}^q)$ независимо от выбора $\|\alpha_{ij}\|_{q \times l}$.

Достаточные условия, сформулированные в теореме 31.2, не являются необходимыми, что подтверждает

Теорема 31.3 *Существуют не эффективно отделимые задачи, для которых линейное замыкание* $\mathcal{L}\{A\}$ *корректно.*

bf Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{R}^3$ - трехмерное евклидово пространство с метрикой ρ такой, что если $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), x, y \in \mathbf{R}^3$, то

$$\rho(x, y) = \max_{i=1,2,3} \mid x_i - y_1 \mid .$$

Существует некоторое разбиение $\mathbf{R}^3$ на два класса: $\mathbf{R}^3 = K_1 \cup K_2$. Задана задача $Z = Z(I_0, \tilde{Z}^4)$, где $I_0 = \langle (S_1, S_2, S_3); \alpha(S_1), \alpha(S_2), \alpha(S_3) \rangle , \alpha(S_1) = \alpha(S_2) = (1, 0), \alpha(S_3) = (0, 1), \tilde{S}^4 = (S^1, \ldots, S^4)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \rho(S^1, S_1) = \rho(S^2, S_1) < \rho(S^3, S_1) = \rho(S^4, S_1),$$

$$0 < \rho(S^1, S_2) = \rho(S^3, S_2) < \rho(S^2, S_2) = \rho(S^4, S_2),$$

$$0 < \rho(S^1, S_3) = \rho(S^4, S_3) < \rho(S^2, S_3) = \rho(S^3, S_3).$$

Задача $Z = Z(I_0, \tilde{Z}^4)$, для которой выполняются эти условия, действительно существует. Приведем примеры таких задач, различающиеся значением действительного числа $r > 0$, связывающего условия, приведенные ниже.

Пусть $S^1 = (a_1, a_2, a_3)$, $S^2 = (b_1, b_2, b_3)$, $S^3 = (c_1, c_2, c_3)$, $S^4 = (d_1, d_2, d_3)$, $S_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $S_2 = (y_1, y_2, y_3)$, $S_3 = (z_1, z_2, z_3)$, где $x_1 = y_1$, $c_1 = b_1$, $c_2 = d_2$, $y_1 - a_1 = c_1 - y_1 = 6r$, $c_1 - z_1 = 10r$, $y_1 - d_1 = 3r$, $y_2 - c_2 = a_2 - y_2 = 6.5r$, $b_2 - z_2 = z_2 - c_2 = 7r$, $x_2 - c_2 = 15r$, $d_3 - y_3 = y_3 - b_3 = 8r$, $d_3 - z_3 = z_3 - a_3 = 7r$, $c_3 - z_3 = 2r, x_3 - a_3 = 3r$.

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\rho(S^1, S_1) = \mid a_1 - x_1 \mid = \mid x_1 - b_1 \mid = \rho(S^2, S_1) = 6r,\\
&\rho(S^3, S_1) = \mid c_2 - x_2 \mid = \mid d_2 - x_2 \mid = \rho(S^4, S_1) = 15r,\\
&\rho(S^1, S_2) = \mid a_2 - y_2 \mid = \mid c_2 - y_2 \mid = \rho(S^3, S_2) = 6r,\\
&\rho(S^2, S_2) = \mid b_3 - y_3 \mid = \mid d_3 - y_3 \mid = \rho(S^4, S_2) = 8r,\\
&\rho(S^1, S_3) = \mid a_3 - z_3 \mid = \mid d_3 - z_3 \mid = \rho(S^4, S_3) = 7r,\\
&\rho(S^2, S_3) = \mid b_1 - z_1 \mid = \mid c_1 - z_1 \mid = \rho(S^3, S_3) = 10r,
\end{aligned}$$

Здесь мы имеем следующие классы - (i, ϵ)-эквивалентности:

$$K_1 = \{S^1, S^2\}, K_2 = \{S^1, S^3\}, K_3 = \{S^1, S^4\}, K_4 = \{S^1, S^2, S^3, S^4\}.$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{U} = \left\langle G_0(\tilde{S}^q); \oplus, \ominus \right\rangle$, она порождается элементами $\varphi(\{1,2\}), \varphi(\{1,3\}), \varphi(\{1,4\}), \varphi(\{1,2,3,4\}),$, где φ определено в (31.14). Тогда множеством всех элементов $\mathcal{U}$ является

$$\{(1,\dots,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,2),(0,1,0,1),(0,1,1,0)\}.$$

Отсюда следует, что задача Z не эффективно отделима. Докажем, что любая классификация $\tilde{S}^4$, реализуется некоторым оператором из $\mathcal{L}\{R\}$. Для этой цели требуется доказать две леммы.

Определение 31.13. Допустимые объекты S^t и S^v назовем (J,k)-изоморфными, если для некоторых i_0, k_0 будет $\rho(k_0,t,i_0) = \rho(k_0,v,i_0)$.

Пусть задана произвольная выборка $\tilde{S}^q$.

Теорема 31.4 *Для всякой классификации $(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)$ выборки $\tilde{S}^q$ такой, что $\tilde{S}_1$ является множеством всех (J,k)-изоморфных (попарно)объектов из $\tilde{S}^q$, в классе $\mathcal{L}\{R_1\}$ существует оператор, реализующий $(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)$.*

bf Доказательство. Пусть дана классификация $(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)$ выборки $\tilde{S}^q$ такая, что $\tilde{S}_1 = (S^{i_1},\dots,S^{i_p})$ - класс всех попарно (J,k)-изоморфных объектов $\tilde{S}^q$. Т. е. для некоторых $i = i_0$ и $k = k_0$ существует $r \geq 0$ такое, что $\rho(k_0,i_1,i_0) = \ldots = \rho(k_0,i_p,i_0) = r$.

Обозначим $r_0 = \max\{\rho(k_0,j,i_0), -1 \mid j \notin \{i_1,\dots,i_p\}, \rho(k_0,j,i_0) < r\}$. В качестве оператора, реализующего $(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)$, рассмотрим $R = R_2 - R_1, R_i \in \{R_1\}, i = 1,2,\dots,$ где $R_i = R(\gamma^i,p^i,\epsilon^i,x^i)$.

Параметры $R_1 : \gamma^1_{i_{(0)}} = Q, \gamma^1 = (\gamma^1_1,\dots,\gamma^1_m), p^1 = (p^1_1,\dots,p^1_n), \gamma^1_i = 1/Q(m-1),\ i = 1,2,\dots,i_0-1,i_0+1,\dots,m; p^1_{k_0}, p^1_k = 1/Q^2(n-1), k = 1,2,\dots,k_0-1,k_0+1,\dots,n; \epsilon^1_{k_0} = r_0, x^1 = (1,0)$ в случае $S_{i_0} \in \tilde{K}_j; \epsilon^1_{k_0} = r, x^1 = r_0, x^1 = (0,1)$ в случае $S_{i_0} \in C\tilde{K}_j$; в обоих случаях $\epsilon^1_k (k \neq k_0)$ произвольно.

Параметры $R_2 : \gamma^2 = \gamma^1, p^2 = p^1, \epsilon^1_{k_0} = r_0, x^2 = (0,1)$ в случае $S_{i_0} \in \tilde{K}_j; \epsilon^2_{k_0} = r, x^2 = (1,0)$ в случае $S_{i_0} \in \tilde{C}K_j; \epsilon_k(k \neq k_0)$ произвольно. Как следует из построения оператора R, его оценки удовлетворяют условиям

$$Q = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q^3} \leq \Gamma(S^v) \leq Q + \frac{2}{Q}, \text{если } v \in \{i_1,\dots,i_p\},$$

$$\mid \Gamma(S^{v'}) \mid \leq \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3}, \text{если } v' \notin \{i_1,\dots,i_p\}.$$

Тогда оператор R реализует $(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)$ при надлежащем выборе Q.

Лемма 31.2 *Для всякой выборки $\tilde{S}^q$ и любого $i = 1, 2, \ldots, q$ классификация $(\{S^i\}, \tilde{S}^q \backslash \{S_i\}$ реализуется некоторым оператором из класса $\mathcal{L}\{R_1\}$.*

bf Доказательство. Рассмотрим произвольное множество K состоящее из (J, k)-изоморфных объектов, включающее $S^i, i = 1, 2, \ldots, q$. Если $K = \{S^i\}$, то доказательство вытекает из леммы 2. Пусть $K = \{S^i, S^{j_1}, \ldots, S^{j_\chi})$; тогда, в силу условия регулярности задачи $Z(I_0, \tilde{S}^q)$, объекты из K попарно изоморфны относительно I_0 и, следовательно, существует последовательность пар индексов

$$(i_1, k_1), \ldots, (i_{\chi'}, k_{\chi'}), \qquad i_1, \ldots, i_{\chi'} \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{31.19}$$

$$k_1, \ldots, k_{\chi'} \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \chi' \leq \chi,$$

такая, что $\rho(k_t, i_t, j_t) \neq \rho(k_t, i_t, i), t = 1, 2, \ldots, \chi'$.

Пусть $(K)_t = (K_1, \ldots, K_{\chi'})$ - последовательность множеств (J, k)- изоморфных объектов, соответствующих последовательности (31.19). Определим подпоследовательность $(K)_t$ следующим образом.

Шаг 1. Первый член K_1 оставим без изменения. Исключим из $(K)_t$ те элементы $K_v, v = 2, 3, \ldots, \chi'$, для которых $S^{j_v} \in K_1$, если такие существуют. В результате получим подпоследовательность последовательности $(K)_t$:

$$K_1, K_{t_1^1}, \ldots, K_{t_{\chi 1}^1}, \qquad \chi_1 \leq \chi' - 1, \qquad 1 \leq t_1^1 \leq \ldots \leq t_{\chi 1}^1 \leq \chi'.$$

Шаг $p+1$. Для полученной на p-м шаге последовательности

$$K_1, K_{t_1^1}, \ldots, K_{t_1^p}, \ldots, K_{t_{\chi p}^p}$$

исключим элементы $K_{t_j^p}, j = 1, 2, \ldots, \chi_p$, у которых $S^t \in K_{t_1^p}$,
$t \in \{t_2^p, \ldots, t_{\chi_p}^p\}$, если такие существуют.

В конечном итоге получаем искомую подпоследовательность $(K)_t' = (K_1, K_{t_1^1}, \ldots, K_{t_1^s})$, где $s \leq \chi \leq -1$. В силу построения $(K)_t'$ имеем $S^i \neq K_1 \cup K_{t_1^1} \cup \ldots \cup K_{t_1^s}$.

По лемме 31.2, найдется последовательность операторов $R, R_1, \ldots, R_s$ (выбранная способом, изложенным в доказательстве леммы 31.3), реализующих, соответственно, классификации

$$(K_1, \tilde{S}^q \setminus K_1), (K_{t_1^1}, \tilde{S}^q \setminus K_{t_1^1}), \ldots, (K_{t_1^s}, \tilde{S}^q \setminus K_{t_1^s}).$$

Тогда в качестве оператора $\hat{R}$, реализующего $(\{S^i\}, \tilde{S}^q \setminus \{S^i\})$ выберем

$$\hat{R} = R - \sum_{v-1}^{s} R_v$$

Действительно, его оценки удовлетворяют неравенствам

$$\Gamma(S^i) \geq Q - \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3}\right)(s+1).$$

$$\mid \Gamma(S^v) \mid \geq \left(\frac{2}{Q} + \frac{1}{Q^3}\right)(s+1), v \neq i, v = 1, 2, \ldots, q.$$

Лемма 31.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Все классификации выборки $\tilde{S}^4$, разбивающие ее на две равные по количеству элементов части, реализуются операторами из $\mathcal{L}\{R_1\}$ по лемме 31.2. Классификации $(\{S^i\}, \tilde{S}^4 \setminus \{S^i\})$ реализуются в $\mathcal{L}\{R_1\}$ по лемме 31.3. Таким образом, $\mathcal{L}\{A\}$ корректно для задачи $Z(I_0, \tilde{S}^4)$. Теорема доказана.

Глава 32

Нижние границы емкости L-мерных алгебр алгоритмов вычисления оценок

Для наиболее употребительных признаковых пространств получены полиномиальные нижние оценки емкости алгебры вычислимых операций над классом алгоритмов вычисления оценок. Как следует из установленных ранее автором верхних оценок, приводимые оценки асимптотически не улучшаемы.

Сохраним терминологию, принятую в [14]. В работе [14] получены верхние оценки емкости модели алгоритмов $\mathcal{M}_G$

$$\Delta_{M_i}[(\hat{\mathcal{M}}_{G^1})_F] \leq [1 + \epsilon_i(n, m, L)] \ominus_i (n, m, L). \tag{32.1}$$

где $M_1 = \mathbf{R}(n)$, M_2 - произвольное пространство, $\epsilon_i(n, m, L) \to 0, n, m,$ $L \to \infty, \theta_1(n, m, L) = (2mL)^n, \theta_2(n, m, L) = (L + 1)^{mn}$.

Естественным образом возникает вопрос о построении нижних оценок для $\Delta_{M^i}[(\hat{\mathcal{M}})_F]$ достаточно близких к границе (32.1), в частности: является ли достижимой граница $\theta_i(n, m, L)$.

Поставим задачу - показать, что $\theta_i(n, m, L)$ - нижняя граница емкости модели $\mathcal{U}^{LU}\{\mathcal{M}\}$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ - алгебра вычислимых операций $\mathcal{U}_0 =< \mathbf{R}; \{f\} >$, содержащая в качестве главных операции сложения, умножения и вычитания:$\{f\} \supset \{+, -, \times\}$.

32.1 Максимальный индекс системы событий

Пусть $\wedge = \wedge(\tilde{\mathcal{M}})$ - пространство параметров, задающих алгоритм модели $\mathcal{M}$, и $C1_{M^q}[A]$ - классификация выборки $\tilde{S}^q$ в пространстве M реализуемая алгоритмом A. Обозначим

$$C1_M(\tilde{M}^q, \wedge) = \{C1_{M^q}[A] \mid A \in \tilde{\mathcal{M}}\}.$$

Всякий решающий алгоритм $A \in \mathcal{M}_G$ может быть рассмотрен, как функция двух аргументов: $A = A(S, \alpha)$, где $\alpha \in \wedge, S \in M$, т.е.

$$A : M \times \tilde{\wedge} \to \{0, 1, \Delta\}.$$

Тогда будем говорить, что модель $\tilde{\mathcal{M}}$ индуцирует систему событий $\mathbf{T}(\wedge)$, если

$$\mathbf{T}(\wedge) = \{T_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\wedge}\}, T_\alpha = T_\alpha[\tilde{\mathcal{M}}] = \{(S, J) \mid A(S, \alpha) = J, A \in \tilde{\mathcal{M}}\}.$$

Индексом системы событий $\mathbf{T}(\wedge)$ назовем число элементов множества классификаций $C1_M(\tilde{S}^q, \wedge)$:

$$\mathrm{Ind}_{T^M}(\tilde{S}^q) =\mid C1_M(\tilde{S}^q, \wedge) \mid .$$

Положим $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{U}^{L,U}_{F_0}\{\mathcal{M}_1\} \equiv \{\tilde{\mathcal{M}}_1\}_0$ и $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{U_0}$,и пусть $\mathcal{M}^{Z,L}_{F,1}(\mathcal{A}) = (\tilde{\mathcal{A}})_{F,1}$ есть $Z\mathcal{F}$ - подмодель модели $(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0$; тогда верна

Теорема 32.1 *Если все объекты выборки $\tilde{S}^q$ в задаче $Z(I_m, \tilde{S}^q)$ имеют попарно различные спектры близости относительно $Z\mathcal{F}$ подмодели $(\mathcal{A})_{F,1}$, то*

$$\mathrm{Ind}^M_{T_0}(\tilde{S}^q) = 2^q. \tag{32.2}$$

Доказательство. Покажем, что любая классификация выборки $\tilde{S}^q$ реализуется некоторым алгоритмом из $(\hat{\mathcal{M}}_1)_0$.

Пусть задан вектор-алгоритм $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_L)$, порождающий $Z\mathcal{F}$ - подмодель $(\tilde{\mathcal{A}})_{\mathcal{F},1}$, где $A_j = A(\epsilon^j), \epsilon^j = (\epsilon^j_1, \ldots, \epsilon^j_n), \epsilon^j = \mathbf{R}^n_+$, и для всякой пары объектов $S^t, S^t \in \tilde{S}^q$

$$\mathcal{G}^{Z,L,t}_{M,U}(B) \neq \mathcal{G}^{Z,L,t'}_{M,U}(B), B = F(B_1, \ldots, B_L), \quad F \equiv \mathcal{F}_0,$$

т.е. существуют $j_0 \in \{1, 2, \ldots, L\}, k_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}, i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такие, что

$$\mathcal{G}^t_{i_0k_0}(j_0) \neq \mathcal{G}^{t'}_{i_0k_0}(j_0). \tag{32.3}$$

Определим последовательность из L операторов $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_L$ с параметрами $\tilde{\gamma}^j, \tilde{\rho}^j, \tilde{\epsilon}^j, \tilde{x}^j$, $j = 1, 2, \dots, L, \tilde{B}_j \in \mathcal{R}_1$:

$$\rho^j = (\rho_1^j, \dots, \rho_n^j), \rho_i^j = 1/2^i, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\gamma^j = (\gamma_1^j, \dots, \gamma_m^j), \gamma_v^j = 1/2^{(v-1)jn}, v = 1, 2, \dots, m,$$

$$x^j = (1, 1), \tilde{\epsilon}^j = \epsilon^j.$$

Докажем, что оценки всех объектов $S^t \in \tilde{S}^q$, доставляемые оператором

$$\tilde{B} = \sum_{j=1}^{L} \tilde{B}_j,$$

попарно различны, т. е. для всякой пары $t, t' \in \{1, 2, \dots, q\}$ будет $(\Gamma_{tj}, \tilde{B}) \neq (\Gamma_{t'j}, \tilde{B})$. Действительно

$$(\Gamma_{tj}, \tilde{B}_j) = \begin{Vmatrix} \mathcal{G}_{11}^t(j) & \dots & \mathcal{G}_{1m}^t(j) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{G}_{n1}^t(j) & \dots & \mathcal{G}_{nm}^t(j) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma_1^j \\ \dots \\ \gamma_m^j \end{Vmatrix} (\rho_1^j, \dots, \rho_n^j) =$$

$$= \sum_{v=1}^{m} \gamma_v^j \left[\rho_1^j \mathcal{G}_{v1}^t(j) + \dots + \rho_n^j \mathcal{G}_{vn}^t(j) \right] =$$

$$= \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{1}{2} \right)^{(j-1)mn + (v-1)n} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^i \mathcal{G}_{vi}^t(j) \right]$$

Следовательно,

$$(\Gamma_{tj}, \tilde{B}_j) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathcal{G}_{1i}^t(1) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \mathcal{G}_{2i}^t(1) \right]^{i+1} + \dots + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \mathcal{G}_{mi}^t(1) \right]^{i+(m-1)n} \right\} +$$

$$\dots + \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \mathcal{G}_{1i}^t \right]^{i+(L-1)mn} + \dots + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \mathcal{G}_{mi}^t \right]^{1+n(m-1)+(L-1)mn} \right\}.$$

В двоичной записи получаем величину оценки

$$(\Gamma_{tj}, \tilde{B}) = 0, \mathcal{G}_1^t(1) \dots \mathcal{G}_m^t(1) \dots \mathcal{G}_1^t(j) \dots \mathcal{G}_m^t(j) \dots \mathcal{G}_1^t(L) \dots \mathcal{G}_m^t(L),$$

где $\mathcal{G}_v^t(j) = (\mathcal{G}_{v1}^t(j) \dots \mathcal{G}_{vn}^t)$, $j = 1, 2, \dots, L, v = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, q$.

Так как выполняется неравенство (32.3), то $(\Gamma_{t'j}, \tilde{B}) \neq \Gamma_{tj}, \tilde{B})$, поскольку в двоичной записи этих величин, где

$$(\Gamma_{tj}, \tilde{B}_j) = 0, \mathcal{G}_1^{t'}(1) \dots \mathcal{G}_m^{t'}(1) \dots \mathcal{G}_1^{t'}(j) \dots \mathcal{G}_m^{t'}(j) \dots \mathcal{G}_1^{t'}(L) \dots \mathcal{G}_m^{t'}(L)$$

$i_0 k_0 j_0$-разряды не совпадают.

Пусть дана произвольная классификация $(\tilde{S}^q; n_1, \dots, n_d$ выборки $\tilde{S}^q)$, определяемая из условий: объекты $S^{nj} \in \mathcal{K}_j, S^v \in C\mathcal{K}_j$, $v \neq n_j, j = 1, 2, \dots, d$.

Рассмотрим многочлен

$$F_{b_1 \dots b_d}(x) = \prod_{\substack{t \notin (n_1, \dots, n_d) \\ t \in (1, 2, \dots, q)}} (x - b_t), \text{где } b_t = (\Gamma_{ij} \tilde{B}).$$

Нетрудно видеть, что

$$C1_{\mathbf{R}(n)}^{S^q}[\hat{A}] = (\tilde{S}^q; n_1, \dots, n_d), \quad \hat{A} = \hat{B} \circ C, \quad \hat{B} = DF_{b_1 \dots b_d}^2 (\sum_{r=1}^{L} B_r),$$

$$D = \frac{C_2}{D_1}, \qquad D_1 = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q} (b_i - b_j)^2.$$

Действительно, в случае $t_0 \notin \{n_1, \dots, n_d\}$

$$(\Gamma_{t_0 j}, \tilde{B}) = b_{t_0}, \quad (\Gamma_{t_0 j}, F_{b_1 \dots b_d}^2(\tilde{B})) = \prod_{t \in (n_1 \dots n_d)} (b_{t_0} - b_t)^2 = 0.$$

Отсюда $(\Gamma_{t_0 j}, \tilde{B}) = 0$. В случае $t_0 \in \{n_1, \dots, n_d\}$ $(\Gamma_{t_0 j}, F_{b_1 \dots b_d}^2(\tilde{B})) > 0$, отсюда

$$(\Gamma_{t_0 j}, \tilde{B}) = \frac{C_2}{D_1} \prod_{t \in (n_1 \dots n_d)} (b_{t_0} - b_t)^2 = C_2 [\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q} (b_i - b_j)^2]^{-1} \prod_{t \in (n_1 \dots n_d)} (b_{t_0} - b_t)^2.$$

Но

$$[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q} (b_t - b_j)^2]^{-1} \prod_{t \in (n_1, \dots, n_d)} (b_i - b_j)^2 = [\prod_{\substack{j \in (n_1, \dots, n_d \\ i \neq j, t_0}} (b_i - b_j)^2]^{-1} > 1.$$

Следовательно, $(\Gamma_{t_0 j}, \tilde{B}) > C_2$. Так как $\hat{A} \in (\tilde{\mathcal{M}}_1)_0$, то получаем . Теорема доказана.

32.2 Нижняя граница емкости алгебры алгоритмов в пространстве M_0

Рассмотрим признаковое пространство $M^0 = M_1^0 \times \ldots \times M_n^0$:

$$M_v^0 =< \mathbf{R}^m, \rho_v >, v = 1, 2, \ldots, n, \rho_v(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} \mid x_i - y_i \mid .$$

Теорема 32.2 *Емкость модели алгоритмов $(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0$ в пространстве M^0 ограничена снизу.*

$$\Delta_{M^0}[(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0] \geq (L+1)^{mn}.$$

Лемма 32.1 *Существуют регулярная задача $Z = Z(I_m, \tilde{S}^q)$ с длиной выборки $q = (L+1)^{mn}$ и вектор-алгоритм $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1^L$, такие, что любые два объекта $S^t, S^{t'} \in \tilde{S}^q, t \neq t'$, имеют в пространстве M^0 различные спектры близости относительно $Z\mathcal{F}$-подмодели $\mathcal{R}_{\mathbf{U}^0}^{Z,L}(B) \equiv (\hat{B})_{\mathbf{U}^0}$, где $B = F(B_1, \ldots, B_L)$:*

$$\mathcal{G}_{M^0\mathbf{U}^0}^{Z,L,t}(B) \neq \mathcal{G}_{M^0\mathbf{U}^0}^{Z,L,t'}(B).$$

Доказательство. Осуществим построение выборок $\tilde{S}_m$ и $\tilde{S}^q$ следующим образом:

$$S_{vk} = (a_{v1}^k, \ldots, a_{vm}^k), \qquad a_{vv}^k = 1 + \frac{L}{L+1},$$

$$a_{vi}^k = 0, i \neq v, v, i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$S_{r_1 \ldots r_m}^k = (\frac{L-r_1}{L+1}, \frac{L-r_2}{L+1}, \ldots, \frac{L-r_m}{L+1}),$$

$$1 \leq r_i \leq L+1, i = 1, 2, \ldots, m, r_i \in N.$$

Пусть задано множество всех таких элементов

$$\mathcal{N} = \{S_{r_1 \ldots r_m}^k \mid 1 \leq r_1 \leq L+1, r_1 \in N\}.$$

Занумеруем натуральными числами от 1 до $(L+1)^{mn}$ все объекты вида

$$S_{r_1 \ldots r_m}^{1,n} = (S_{r_1^1 \ldots r_m^1}^1, \ldots, S_{r_1^n \ldots r_m^n}^n), \tag{32.4}$$

где $S_{r_1^k \ldots r_m^k}^k \in \mathcal{N}$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Полученная последовательность объектов образует искомую выборку $\tilde{S}^q = (S^1, \ldots, S^{(L+1)mn})$.

Порядок нумерации объектов (32.4) здесь несуществен. Далее пусть $S_v = (S_{v1}, \dots, S_{vn}), v = 1, 2, \dots, m$. Информационные векторы $\alpha(S_v)$ произвольны. Построение $Z(I_m, \tilde{S}^q)$ закончено.

Вектор-алгоритм $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_L)$ определяется следующим образом:

$$A_j = A(\gamma^j, \rho^j, \epsilon^j, x^j), x^j = (1, 1), \epsilon^j = (\epsilon_1^j, \dots, \epsilon_n^j),$$

γ^j, ρ^j произвольны,

$$\epsilon_k^j = 1\frac{L}{L+1}, \epsilon_k^{L-1} = 1 + \frac{L-1}{L+1}, \dots, \epsilon_k^1 = 1 + (L+1)^{-1}.$$

Рассмотрим произвольную пару объектов

$$S^t = S^{1,n}_{v_1^k \dots v_m^k}, \qquad S^t = S^{1,n}_{w_1^k \dots w_m^k}.$$

Поскольку $S^t \neq S^{t'}$, то существует индекс $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что

$$S^k_{v_1^k \dots v_m^k} \neq S^k_{w_1^k \dots w_m^k}.$$

Отсюда хотя бы для одного $v = 1, 2, \dots, m$ будет $v_v^k \neq w_v^k$. Пусть для определенности $v_v^k > w_v^k$. Тогда, по построению задачи $Z(I_m, \tilde{S}^q)$,

$$\rho(S_{vk}, S^k_{w_1^k \dots r_m^k}) = 1 + \frac{w_v^k}{L+1} < \rho(S_{vk}, S^k_{v_1^k \dots v_m^k}) = 1 + \frac{v_v^k}{L+1}.$$

Рассмотрим функцию $\tilde{H}^k_{ji}(x) = \rho_k(S_{ik}, x) - \epsilon_k^j$. Тогда

$$\tilde{H}^k_{w_v v}(S^k_{w_1^k \dots w_m^k}) = 0,$$

и

$$\tilde{H}^k_{w_v v}(S^k_{v_1^k \dots v_m^k}) = (1 + \frac{v_v^k}{L+1}) - (1 + \frac{w_v^k}{L+1}) = \frac{v_v^k - w_v^k}{L+1} > 0,$$

Отсюда

$$\mathcal{G}^{t'}_{vk}(w_k) = Sg^{1-\alpha}(\tilde{H}^k_{w_v v}(S^k_{w_1^k \dots w_m^k})) \neq Sg^{1-\alpha}(\tilde{H}^k_{w_v v}(S^k_{v_1^k \dots v_m^k})) = \mathcal{G}^t_{vk}(v)$$

где $\alpha = P_i$. Лемма доказана.

Так как спектры близости объектов выборки $\tilde{S}^q$ попарно различны, то, по теореме 32.1, индекс системы событий $\mathrm{Ind}^{M^0}_{T^0}(\tilde{S}^q) = 2^q$. Таким образом, получаем

$$\Delta_{M^0}[(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0] \geq \Delta_{M^0}[\hat{B})_{U^0}] \geq q - (L+1)^{mn}.$$

Теорема доказана.

32.3 Емкость алгебры алгоритмов в пространстве $R(n)$

Теорема 32.3 *Емкость модели алгоритмов* $(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0$ *в пространстве признаков* $\mathbf{M} = \mathbf{R}(n)$ *ограничена снизу:*

$$\Delta_{\mathbf{M}^0}[(\tilde{\mathcal{M}}_1)_0] \geq (2mL)^n.$$

Для доказательства теоремы 32.3 осуществим построение регулярной задачи $Z(I_m, \tilde{S}^\delta)$ и соответствующей $Z\mathcal{F}$-подмодели, емкость которой в точности равна величине $(2mL)^n$ (лемма 32.3).

Как следует из теоремы 32.1, для этого достаточно показать, что все объекты рабочей выборки $\tilde{S}^\delta$ задачи Z имеют попарно различные спектры близости. Этот факт будет получен в лемме 32.4, и доказательство его опирается на ряд свойств (леммы 32.5 и 32.6) функций $H^k_{iv}(x)$, введенных в [1].

Лемма 32.2 *Существует регулярная задача* $Z = Z(I_m, S^\delta)$ *, где* $\delta = (2mL)^n$*, и* $Z\mathcal{F}$*- подмодель* $\mathcal{M}^{Z,L}_{\mathbf{U}^0}(\mathcal{A}) \equiv (\hat{\mathcal{A}})_{\mathbf{M}}$ *, такие, что*

$$\Delta_{R(n)}[(\hat{\mathcal{A}}_{U^0}] = (2mL)^n.$$

Доказательство. Осуществим построение Z и вектор алгоритма $\mathcal{A}$: $\tilde{S}_m = (S_1, \ldots, S_m)$, где $S_{i,} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$; $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_1)$ и $A_j = A(\gamma^j, \rho^j, \epsilon^j, x^j)$, где γ^j, ρ^j произвольные, $x^j = (1,1), \epsilon^j = (\epsilon^j_1, \ldots, \epsilon^j_n), j = 1, 2, \ldots, L$.

Пусть задана константа $b = 1$. Тогда $a_{ik} = i + m, \epsilon^j_k = m + j/(L+1)$. Очевидно, $\epsilon^1_k > a_{mk} - a_{1k}$ и $a_{1k} - \epsilon^L_k > 0$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. В силу построения, $a_{1k} < \ldots < a_{mk}$ и $\epsilon^1_k < \ldots < \epsilon^L_k$.

Прежде чем построить выборку $\tilde{S}^\delta$, определим последовательность

$$S_{1k}, \ldots, S_{(2mL+1)k} \tag{32.5}$$

действительных чисел, удовлетворяющую следующим условиям. Пусть $q = 2mL + 1$.

$$3m + L/(L+1) < S_{qk},$$

$$3m + (L-1)/(L+1) < S_{(q-1)k} < 3m + L/(L+1),$$

....

$3m+1/(L+1) < S_{(q-L+1)k} < 3m+2/(L+1);$

$$3m-i+1+L/(L+1) < S_{[\tau(i)+1])k} < 3m-i+2+1/(L+1), \tag{32.6}$$

....

$3m-i+1+1/(L+1) < S_{[\tau(i)+1]k} < 3m-i+1+2/(L+1),$

$\tau(i) = q-iL, i = 1, 2, \ldots, m, m-1/(L+1) < S_{\tau(m)k} < 3m+1/(L+1);$

$m-i-2/(L+1)-1 < S_{[\tau(i+m-1)-1]k} < m-i-1/(L+1)-1;$

....

$m-1-2-1/(L+1)-1 < S_{[\tau(i+m-1)-L]k} < m-i-1-L/(L+1);$

$1-2/(L+1)-1 < S_{[\tau(2m-1)-1]k} < 1-1/(L+1),$

....

$0 < S_{\tau(2m)k} < 1-L/(L+1).$

Тогда выборка $\tilde{S}^\delta$ определяется следующим образом:

$$\tilde{S}^\delta = \{S \mid S = (S_{\upsilon_1 1}, \ldots, S_{\upsilon_n n} \in W^v_{\upsilon_v}\},$$

где $\upsilon_v \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\} \setminus \{m+1\}, v = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что $\mid \tilde{S}^\delta \mid = (2mL)^n$.

В определении $\tilde{S}^\delta$ отсутствует элемент $S_{\tau(m)k}$. Введение его в последовательность (32.5) необходимо для симметрии в обозначениях.

Последовательность неравенств (32.6) разделена на системы. Каждой такой системе поставим в соответствие семейство элементов последовательности (32.5). Введем обозначения для каждого из семейств:

$$W^k_1 = \{S_{qk}, \ldots, S_{(q-L+1)k}\},$$

$$W^k_i = \{S_{[\tau(i)+L]k}, \ldots, S_{[\tau(i)+1]k}\}, W^k_{m+1} = \{S_{\tau(m)k}\},$$

....

$$W^k_{m+i+1} = \{S_{[\tau(i+m-1)-1]k}, \ldots, S_{\tau(i+m)k}\},$$

....

$$W^k_{2m+1} = \{S_{[\iota(2m-1)-1]k}, \ldots, S_{\iota(2m)k}\}.$$

Рассмотрим функции $H^k_{jv}(x)$, определенные в [14]:

$$H^k_{j\gamma}(x) = \mid a_{\psi_k(i)k} - x \mid -\epsilon_k^{\phi_k(j)};$$

при этом будем рассматривать тождественные перестановки $\psi_k(i) = i$, $\phi_k(j) = j$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, L$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 32.3 *Все объекты выборки $\tilde{S}^\delta$ имеют попарно различные спектры близости относительно $Z\mathcal{F}$- подмодели $(\tilde{\mathcal{A}})_{\mathbf{R}(n)}$.*

Докажем, что для всяких наборов
$(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n)$, $(w_1, \ldots, w_n)$, $S^t = (S_{\upsilon_1 1}, \ldots, S_{\upsilon_n n}) \neq (S_{w_1 1}, \ldots, S_{w_n n}) = S^{t'}$
выполняется

$$\mathcal{G}^{Z,L,t}_{\mathbf{R}(n),\mathbf{U}^0}(A) \neq \mathcal{G}^{Z,L,t'}_{\mathbf{R}(n),\mathbf{U}^0}(A).$$

Так как $(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) \neq (w_1, \ldots, w_n)$, , то существует $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\upsilon_k \neq w_k$ и по построению $S_{\upsilon_k k} \neq S_{w_k k}$. Достаточно показать, что найдутся $j = 1, 2, \ldots, L$ и $v = 1, 2, \ldots, n$, такие, что

$$\mathcal{G}^t_{vk}(j) \neq \mathcal{G}^{t'}_{vk}(j). \tag{32.7}$$

Для краткости положим $\upsilon_k = \upsilon$, $w_k = w$, $w = \upsilon + r$, $r > 0$. Для доказательства (32.7) необходимо рассмотреть несколько случаев. Предварительно сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 32.4 *Если $H^k_{jv}(S_{\upsilon k})H^k_{jv}(S_{(\upsilon+r)k}) < 0$ для некоторых $\upsilon = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, L$, то верно (33).*

Доказательство. Пусть $H^k_{jv}(S_{\upsilon k}) > 0$ и $H^k_{jv}(S_{(\upsilon+r)k}) < 0$. Тогда

$$@_{\upsilon k^t}(j) = Sq^{1-\alpha}(H^k_{jv}(S_{\upsilon k})) \neq Sq^{1-\alpha}(H^k_{jv}(S_{(\upsilon+r)k}))@_{\upsilon k^{t'}}(j),$$

где $\alpha = P_v$. Аналогично - в случае $H^k_{jv}(S_{\upsilon k}) < 0$, $H^k_{jv}(S_{wk}) > 0$. Лемма 32.4 доказана.

Случай 1. $S_{\upsilon k}, S_{wk} \in W^k_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\} \setminus \{m+1\}$. При $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ либо

$$a_{\tau k} + \epsilon_k^j < S_{\upsilon k} < a_{\tau k} + \epsilon_k^{j+1}, \tau = m - i + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{\tau k} + \epsilon_k^{j-r} < S_{(\upsilon+r)k} < a_{\tau k} + \epsilon_k^{j-r+1}, j = r + 1, \ldots, L - 1,$$

либо

$$a_{\tau k}+\epsilon_k^L<S_{vk}<a_{(\tau+1)k}+\epsilon_k^{L-r}, a_{\tau k}+\epsilon_k^{L-r}<a_{\tau k}+\epsilon_k^{L-r+1}$$

и, следовательно

$$H_{j\tau}^k(S_{vk})>0, H_{j\tau}^k(S_{(v+r)k})<0 \text{ и } H_{L\tau}(S_{vk})>0, H_{L\tau}^k(S_{(v+r)k})<0$$

Осталось применить лемму 32.4.

Если $i\in\{m+2,\dots,2m+1\}$ - то доказательство аналогично.

Сформулируем свойства функции $H_{jv}^k(x)$.

Лемма 32.5 *Пусть* $i\in\{1,2,\dots,m\}$, $S_{vk}\in W_t^k$. *Если для некоторого* j_0 *имеем* $H_{j_0v}^k(S_{vk})<0$, $v=1,2,\dots,m-1$, *или* $H_{1(v+1)}(S_{vk})<0$, *то* $H_{j(v+1)}^k(S_{vk})<0$ *для всякого* $j=1,2,\dots,L$; *если* $H_{j_0v}^k(S_{vk})>0$, *то* $H_{j(v-1)}^k(S_{vk})>0$, $v=2,3,\dots,m$.

2. Пусть $S_{wk}\in W_{m+i+1}^k$. *Если для некоторого* j_0 *имеем* $H_{j_0v}^k(S_{wk})>0$, *то* $H_{j(v+1)}^k>0$, $v=1,2,\dots,m-1$, $j=1,2,\dots,L$; *если* $H_{j_0v}^k(S_{wk})<0$, $v=2,3,\dots,m$, $j=1,2,\dots,L$, *или* $H_{1(v-1)}^k(S_{wk})<0$, *то* $H_{j(v-1)}^k<0$.

Доказательство. 1. Пусть $S_{vk}\in W_t^k$, $H_{1(v+1)}^k(S_{vk})<0$ тогда и только тогда, когда $\mid a_{(v+1)k}-S_{vk}\mid -\epsilon_k^1<0$. Но $a_{(v+1)k}>a_{vk}$, $\epsilon_k^1<\epsilon_k^j$, $j=1,2,\dots,L$. Поэтому $H_{j(v+1)}^k(S_{vk})\le\mid a_{(v+1)k}-S_{vk}\mid -\epsilon_k^1<0$, и если $H_{j_0v}^k(S_{vk})<0$, то $\mid a_{vk}-S_{vk}\mid -\epsilon_k^{j_0}<0$. Кроме того, $\mid a_{(v+1)k}-S_{vk}\mid<\mid a_{vk}-S_{vk}\mid$, поэтому, в силу определения $\epsilon_k^j, H_{j(v+1)}^k(S_{vk})<0, j=1,2,\dots,L$.

Пусть $H_{j_0v}(S_{vk})>0$, что равносильно $\mid a_{vk}-S_{vk}\mid -\epsilon_k^{j_0}>0$; тогда $H_{j(v-1)}^k(S_{vk})>\mid a_{vk}-S_{vk}\mid -\epsilon_k^{j_0}>0$, $j=1,2,\dots,L$.

2.Пусть $S_{wk}\in W_{m+i+1}$. Если $H_{j_0v}^k(S_{wk})>0$, то $H_{j(v+1)}^k(S_{wk})>\mid a_{vk}-S_{wk}\mid -\epsilon_k^{j_0}>0$, $j=1,2,\dots,L$. Если $H_{j_0v}^k(S_{wk})<0$, то $\mid a_{(v-1)k}-S_{wk}\mid<\mid a_{vk}-S_{wk}\mid$, $H_{j(v-1)}^k(S_{wk})<\mid a_{vk}-S_{wk}\mid -\epsilon_k^{j_0}<0$.

Случай $H_{1(v-1)}^k(S_{wk}<0$ рассматривается аналогично. Лемма 32.5 доказана.

Случай 2. $S_{vk}\in W_{i_1}^k$, $S_{wk}\in W_{i_2}^k$ причем один из индексов больше другого. Без ограничения общности положим $i_2>i_1$.

При $i_1,i_2\in\{1,2,\dots,m\}$ по построению семейства объектов W_t^k имеем $H_{1(m-i_1+1)}^k(S_{vk})>0$ и для всякого v' такого, что $S^{v'}\in W_{i_1+1}^k$, выполняется $H_{1(m-i_1)}^k(S_{v'k})<0$. Но $i_2\ge i_1+1$, и тем более $H_{1(m-i_2+1)}^k(S_{wk})<0$,где $m-$

$i_2+1 < m-i_1+1$, следовательно, по свойству 1 леммы 32.6, выполняется $H^k_{1(m-i_1+1)}(S_{wk}) < 0$.

При $i_1, i_2 \in \{m+2, \dots, 2m+1\}$, $i_1 = m+i^1+1, i^2 = m+i^2+1, i^2 > i^1$ по определению семейств W_{m+i+1} и построению последовательности (32.5) имеем $H^k_{jv}(S_{vk}) =\mid a_{vk} - S_{vk} \mid -\epsilon^1_k < 0$, $v = m - i_1$. В то же время $H^k_{1v_1}(S_{wk} =\mid a_{v_1k} - S_{wk} \mid -\epsilon^1_k > 0$, $v_1 = m - i^2 + 1$. Но $v_1 \leq m - i^1$ и, по свойству 2 леммы 32.5, $H^k_{1v)}(S_{wk}) > 0$.

Теперь в обоих подслучаях для завершения доказательства осталось применить лемму 32.4.

Случай 3. $S_{wk}, S_{vk} \in W^k_1$, где $i \in \{m+2, \dots, 2m+1\}$.

Тогда либо

$$a_{vk} - \epsilon^{j+1}_k < S_{vk} < a_{vk} - \epsilon^j_k, a_{vk} - \epsilon^{j+r+1}_k < S_{wk} < a_{vk} - \epsilon^{j+r}_k$$

$$1 \leq j \leq L - r - 1, v = m - i + 1,$$

либо

$$a_{vk} - \epsilon^{L-r+1}_k < S_{vk} < a_{vk} - \epsilon^{L-r}_k, a_{(v-1)k} - \epsilon^1_k < S_{wk} < a_{vk} - \epsilon^L_k$$

Отсюда в первом подслучае $H^k_{(j+r)v}(S_{wk}) > 0$, $H^k_{(j+r)v}(S_{vk}) < 0$, а во втором подслучае $H^k_{Lv}(S_{wk}) > 0$, $H^k_{Lv}(S_{vk}) < 0$.

По лемме 32.4,в первом $\mathcal{G}^t_{vk}(j+r) \neq \mathcal{G}^{t'}_{vk}(j+r)$, а во втором подслучае $\mathcal{G}^t_{vk}(L) \neq \mathcal{G}^{t'}_{vk}(L)$.

Случай 4. $S_{vk} \in W^k_{i_1}, S_{wk} \in W^k_{i_2}, i_1 \in \{1, 2, \dots, m\}, i_2 \in \{m+2, \dots, 2m+1\}$, $i_2 = m + i^2 + 1$.

Пусть $i_1 = i^2 = i$. Тогда, по определению семейств (32.6), для некоторых $j, j' \in \{1, 2, \dots, L\}$

$$a_{\tau k} + \epsilon^j_k < S_{vk} < a_{\tau k} + \epsilon^{j+1}_k, \tau = m - j + 1$$

или

$$a_{\tau k} + \epsilon^L_k < S_{vk} < a_{(\tau+1)k} + \epsilon^1_k, a_{\tau k} - \epsilon^{j'+1}_k < S_{wk} < a_{\tau k} - \epsilon^{j'}_k$$

или

$$a_{(\tau-1)k} - \epsilon^1_k < S_{wk} < a_{\tau k} - \epsilon^L_k$$

и ,следовательно, $H^k_{j\tau}(S_{vk}) > 0$, $H^k_{(j+1)\tau)}(S_{vk}) > 0$, $H^k_{j'\tau}$ $(S_{wk}) < 0$, $H^k_{(j'+1)\tau}$ $(S_{wk}) < 0$, или

$$H^k_{1(\tau+1)}(S_{vk}) < 0 \text{ либо } H^k_{1(\tau-1)}(S_{wk}) < 0. \qquad (32.8)$$

Предположим следующее

а) $\tau > 1$, тогда, по лемме 5 и согласно неравенствам (32.8),

$$H^k_{j(m-i)}(S_{vk}) < 0, H^k_{j'(m-i)}(S_{wk}) > 0;$$

б) $\tau = 1$, тогда

$$H^k_{j(\tau+1)}(S_{vk}) < 0, H^k_{j(\tau+1)}(S_{wk}) > 0.$$

По лемме 32.4, для а) имеем $\mathcal{G}^t_{(\tau-1)k}(j) = \mathcal{G}^{t'}_{(\tau-1)k}(j)$, а для б) будет

$$\mathcal{G}^t_{(\tau+1)k}(j) \neq \mathcal{G}^{t'}_{(\tau+1)k}(j) \tag{32.9}$$

Пусть $i_1 \neq i^2$ и $i^2 > i_1$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем либо $H^k_{(j+1)\tau}(S_{vk}) < 0$, $H^k_{1(\tau+1)}(S_{vk}) < 0$.

Обозначим $v = m-i^2+1$,тогда либо $H^k_{j'v}(S_{wk}) > 0$, либо $H^k_{Lv}(S_{wk}) > 0$. Но $v < \tau$, и, используя лемму 32.5, получаем $H^k_{jv}(S_{wk}) > 0$, и тем более $H^k_{1(v+1)}(S_{wk}) > 0$.

По лемме 32.4, верно (32.7) или (32.8). Случай $i^2 < i_1$, рассматривается аналогично. Лемма 32.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 32.3.

Поскольку в пространстве $\mathbf{R}(n)$ все объекты выборки $\tilde{S}^q$ имеют попарно различные спектры близости, то индекс системы событий $T_0 = T[(\mathcal{A})_{\mathbf{U}^0}]$

$$\mathrm{Ind}^{\mathbf{R}(n)}_{T^0}(\tilde{S}^q) = 2^q$$

и, значит

$$\Delta_{\mathbf{R}(n)}[\hat{\mathcal{M}}_1) - 0] \geq q = (2mL)^n.$$

Теорема доказана.

Из теорем 32.2 и 32.3 и результатов [14] вытекает

Следствие. Для любых $m, n, L \in \mathbf{N}$

$$(2mL)^n \leq \Delta_{\mathbf{R}(n)}[\hat{\mathcal{M}}^1_G)_0] \leq [1 + \epsilon_1(m, n, L)](2mL)^n,$$

$$(L+1)^{mn} \leq \Delta_{M^0}[\hat{\mathcal{M}}^1_G)_0] \leq [1 + \epsilon_2(m, n, L)](L+1)^{mn},$$

где $\epsilon_i(m, n, L) \to 0$, $i = 1, 2, m, n, L \to \infty$.

Таким образом, величины $(2mL)^n$ и $(L+1)^{mn}$ с точностью до бесконечно малой оценивают емкость модели $(\mathcal{M}_1)_0$ в пространствах $\mathbf{R}(n)$ и M^0.

Отсюда, в частности, следует, что $\theta_i(m,n,L)$ - ее точная асимптотическая нижняя граница.

Применяя [14] , получаем оценку длины выборки, достаточной для обучения с надежностью $1-\eta$. Так, например, для детерминистского случая и пространства $\mathbf{R}(n)$ верна.

Теорема 32.4 *Для всякого $\eta, 0<\eta<1$, с вероятностью $1-\eta$ частоты ошибок распознающего алгоритма $A \in (\hat{\mathcal{M}}_G^1)_0$ на обучающей $\tilde{S}_q$, и рабочей $\tilde{S}^q$ выборках различаются меньше чем на δ , если длина выборки q удовлетворяет условию*

$$q \geq \frac{4}{\delta}(1+\epsilon_1)(2mL)^n[1-\ln\frac{\delta}{4}-\ln\frac{\eta}{3}].$$

32.4 Емкость L-ограниченного линейного замыкания модели $\mathcal{M}_1$.

Обозначим

$$\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}\} = \{A \mid A = \sum_{i=1}^{L} c_i A_i, c_i \in \mathbf{R}, A_i \in \mathcal{M}\}.$$

Поскольку модель $\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}\}$ часто используется для решения различных практических задач при достаточно больших L исследуем емкость $\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}\}$ подробнее.

Оценка, полученная в следствии, может быть для модели $\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}_1\}$ значительно усилена.

Теорема 32.5 *Емкость L-ограниченного линейного замыкания модели $\mathcal{M}_1$ в пространстве $\mathbf{R}(n)$ ограниченна:*

$$([L/2]+1)mn \leq \Delta_{\mathbf{R}(n)}[\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}_1\}] \leq mn(L+1)+1.$$

Доказательство. Нижняя оценка легко может быть получена методом построения операторов, изложенным в [14]. Докажем верхнюю оценку в условии теоремы. Пусть заданы произвольный алгоритм

$$A \in \mathcal{L}_L\{\mathcal{M}_1\}, A = B \circ \mathrm{C},\ \mathrm{C}{=}\mathrm{C}(C_1, C_2),$$

и регулярная задача $Z(I_m, \tilde{S}^q)$, тогда оценка объекта $S^t \in \tilde{S}^q$ может быть вычислена по формуле

$$(\Gamma_{ij}, B) = \sum_{j=1}^{L} c_j \sum_{\substack{i=1 \\ P_i=\alpha}}^{m} \gamma_i^j \sum_{\alpha=0,1} x_\alpha^j \sum_{v=1}^{n} p_v^j Sg^{1-\alpha}(\rho(v,i,t) - \epsilon_v^j).$$

где $A_j = A(\gamma^j, p^j, \epsilon^j, x^j)$.

Введем обозначения $a_{ivj} = c_j \gamma_i^j p_v^j x_{P_i}^j$, $\rho^t = (\rho_{11}^t, \ldots, \rho_{mn}^t)$, $\rho_{vi}^t = \rho(v,i,t)$, $x = (x_{11}, \ldots, x_{mn})$. Оператору B поставим в соответствие mn-местную функцию

$$g^B(x) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{\substack{i=1 \\ P_i=\alpha}}^{m} \sum_{v=1}^{n} a_{ivj} Sg^{1-\alpha}(x_{iv} - \epsilon_v^j),$$

Очевидно, что $g^B(\rho^t) = (\Gamma_{tj}, B)$. Класс функций $\mathcal{D} = \{g^B(x) \mid B \in \mathcal{L}_L\{\mathcal{R}_1\}\}$ может быть рассмотрен, как класс разделяющих алгоритмов в пространстве $\mathbf{R}^{mn}$: вектор ρ^t отнесен к классу $\mathcal{K}_j$, если $g^B(\rho^t) > C_2$, и к классу $C\mathcal{K}_j$, если $g^B(\rho^t) < C_1$. Причем

$$\Delta_{R(n)}[\mathcal{D}] = \Delta_{R(n)}[\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}_1\}] = g_0 < +\infty.$$

Отсюда вытекает, что существует выборка $\tilde{S}^{q_0}$, все классификации которой реализуются алгоритмами из $\mathcal{L}_L\{\mathcal{M}_1\}$.

Выборкам $\tilde{S}^{q_0}$, $\tilde{S}_m$ в пространстве $\mathbf{R}(n)$ будет соответствовать выборка $\tilde{\rho}^{q_0} = (\rho^1, \ldots, \rho^{q_0})$ в пространстве $\mathbf{R}^{mn}$, которая делится на два подмножества всеми возможными способами с помощью функций из $\mathcal{D}$.

Рассмотрим другой класс функций размерности $(L+1)mn$:

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{g}(x,y) \mid \tilde{g} = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{n} \alpha_{ivj}(b_{ivj} y_{ivj} - x_{iv}) \right\},$$

где $a_{ivj}, b_{ivj} \in \mathbf{R}$, $y = (y_{111}, \ldots, y_{mnL})$.

Выборке $\tilde{\rho}^{q_0}$ поставим в соответствие выборку элементов из $\mathbf{R}^{(L+1)mn}$:

$$\tilde{\rho}^{q_0}(Y_1) = ((\rho^1, Y_1), \ldots, (\rho^{q_0}, Y_1)), Y_1 = (1, \ldots, 1), Y_1 \in \mathbf{R}^{mnL}.$$

Класс $\tilde{\mathcal{D}}$ является классом разделяющих функций относительно тех же констант (C_1, C_2).

Докажем, что любая классификация выборки $\tilde{\rho}^{q_0}(Y_1)$ реализуется с помощью подходящей функции из $\tilde{\mathcal{D}}$.

Пусть задана некоторая подвыборка $\hat{\rho}(Y_1)$ выборки $\tilde{\rho}^{q_0}(Y_1)$. Без ограничения общности положим

$$\hat{\rho}(Y_1) = ((\rho^1, Y_1), \ldots, (\rho^r, Y_1)), 0 \le r \le q_0.$$

В пространстве $\mathbf{R}^{mn}$ выборке $\hat{\rho}(Y_1)$ будет соответствовать подвыборка выборки $\tilde{\rho}^{q_0} : \rho = (\rho^1, \ldots, \rho^r)$. Тогда, по определению $\tilde{\rho}^{q_0}$,существует $g^B \in \mathcal{D}$ такая, что для всяких v, w, $v \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $w \in \{r+1, \ldots, g_0\}$ будет $g^B(\rho^v) > C_2$, $g^B(\rho^w) > C_1$, где

$$g^B(\rho^t) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{\substack{i=0 \\ P_j(S_t)=\alpha}} \sum_{v=1}^{n} a_{ivj} S g^{1-\alpha}(\rho^t_{i_v} - \epsilon^j_v).$$

Введем обозначения $D^1 = \{(i, v, j) \mid \rho^t_{iv} - \epsilon^j_v \le 0\}$, $D^0 = \{(i, v, j) \mid \rho^t_{iv} - \epsilon^j_v > 0\}$. Положим для множества индексов $\mathcal{G}_1 = \{i \mid P_j(S_i) = 1\}$

$$b_{ivj} = \begin{cases} a_{ivj} + 1, \text{если}\, (i, v, j) \in D^1 \\ a_{ivj}, \quad\ \text{если}\, (i, v, j) \in D^0 \end{cases}$$

для множества индексов $\mathcal{G}_1 = \{i \mid P_j(S_i) = 0\}$

$$b_{ivj} = \begin{cases} a_{ivj} + 1, \text{если}\, (i, v, j) \in D^1 \\ a_{ivj}, \qquad \text{если}\, (i, v, j) \in D^0 \end{cases}$$

В силу определения a_{ivj}, b_{ivj}, для всякой тройки чисел (i, v, j)

$$a_{ivj}(b_{ivj} - \rho^t_{iv}) = a_{ivj} \overline{Sg}(\rho^t_{iv} - b_{ivj}).$$

Поэтому функция

$$\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad \tilde{g}(x, y) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{n} a_{ivj}(b_{ivj} y_{ivj} - x_{iv}),$$

удовлетворяет равенству $g((\rho^t, Y_1)) = g(\rho^t)$.

Таким образом, функция g относит все элементы выборки $\hat{\rho}(Y_1)$, и только их, к одному классу. Что и требовалось доказать.

Но емкость класса разделяющих функций $\tilde{\mathcal{D}}$ не превосходит емкости класса гиперплоскостей размерности $(L+1)mn$ равной, как известно, $(L+1)mn + 1$. Следовательно, $g_0 \le (L+1)mn + 1$. Теорема доказана.

Глава 33

Оптимальные алгоритмы в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок

В работе [14] доказано, что емкость корректного класса алгоритмов $U^k\{\mathcal{A}\}$ при $k - q \ln q$ над множеством регулярных задач имеет ограниченный рост. Вместе с тем полученная оценка емкости оставалась достаточно высокой и этим объяснялись трудности в ее применении для построения оптимального или близкого к нему по функционалу качества алгоритма [14]. Целью настоящей заметки является понижение оценок емкости корректных классов алгоритмов и длины обучающей выборки, достаточной для построения алгоритма с заданным качеством ϵ.

Символами R и P будем обозначать операторы вычисления оценок с системами опорных множеств $\Omega = \{i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ и $\Omega = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ соответственно, а символом Q - операторы обоих типов (n - размерность признакового пространства M).

Рассмотрим произвольный операторный полином вида

$$\begin{aligned} F(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\tilde{L}}) = c_1 Q_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot Q_{\tau_1}^{k_{\tau_1}} + \\ + c_2 Q_{\tau_1+1}^{k_{\tau_1}+1} \cdot \ldots \cdot Q_{\tau_2}^{k_{\tau_2}} + \ldots + c_p Q_{\tau_{p-1}+1}^{k_{\tau_{p-1}}+1} \cdot \ldots \cdot Q_{\tilde{L}}^{k_{\tilde{L}}}, \end{aligned} \tag{33.1}$$

где

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{h_i} Q_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, \tilde{L}.$$

Размерностью полинома F назовем набор

$$H = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p; h_1, h_2, \ldots h_{\tilde{L}}), \tau_p = \tilde{L}.$$

Пусть $L = \sum_{i=1}^{\tilde{L}} h_1$ и $Z = Z(I_0, \tilde{S}^q)$ - произвольная регулярная задача.

Определение 33.1. Операторные полиномы $F_1 = F_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\tilde{L}})$ и $F_2 = F_2(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_{\tilde{L}})$ размерности H назовем L-эквивалентными, если для всякого $i = 1, 2, \ldots, \tilde{L}$

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{h_i} Q_i^j, \quad \hat{Q}_1 = \sum_{j=1}^{h_i} Q_i^j, \quad Q_i^j \quad \overset{1}{\sim} \hat{Q}_i^j$$

(в смысле [14]), $j = 1, 2, \ldots, b_i$.

Очевидно, для всякого H класс $\mathcal{F}(H)$ операторных полиномов размерности H разбивается относительно задачи Z на непересекающиеся классы L-эквивалентности.

Введем обозначения:

$$\mathcal{A}(L) = \{A \mid A = Q \circ r(C), Q \in \mathcal{F}(\mathrm{H})$$

и $[F(Z, L)]$ - класс L-эквивалентности, порожденный операторным полиномом F вида (1). Как следует из [14], число таких классов не превосходит

$$\chi[F(Z, L)] \leq [3(mq + 1)^n]^L. \tag{33.2}$$

Пусть $\mathcal{M}[F(Z, L)] = \{\mathcal{G}_t[F, L)] \mid t = 1, 2, \ldots, q\}$ - множество всех обобщенных характеристических векторов (о.х.в. [14]) выборки допустимых объектов $\tilde{S}^q$ и его мощность в пространстве $M = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{K}_j$

$$\mu_M[F(Z, L)] =\mid \mathcal{M}[F(Z, L)] \mid .$$

Обозначим $U^k\{\mathcal{A}_1\}$ $(U^k\{\mathcal{A}\})$ алгебраическое замыкание алгоритмов вычисления оценок степени k такое, что $\{\mathcal{A}_1)\}$, $(\{\mathcal{A}\})$ - класс алгоритмов $A, A = R \circ r(C)$ $(A = Q \circ r(C)); r(C)$ - решающее правило.

Пусть $\mathbf{R}$ - множество действительных чисел, $\|\alpha_{ij}\|_{q \times l}$ - информационная матрица задачи Z. Тогда величину

$$V(Z) = \max_{1 \leq j \leq t} \mid \ \mathcal{R}(j) \mid, \quad \mathcal{R}(j) = \{v \mid \alpha_{v_j} = 1\},$$

назовем весом задачи Z .

Для всяких $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ определим последовательность классов допустимых объектов из $\tilde{S}^q$ такую, что объекты $S^{t_1}, S^{t_2} \in \tilde{S}^q$ попадают в один класс, если $\rho(k, i, t_1) = \rho(k, i, t_2)$ ($\rho(k, i, t)$ определено. В результате данная последовательность имеет вид

$$U_{ik}^1, \ldots, U_{ik}^{p(i,k)}, \quad 1 \leq p(i,k) \leq q. \tag{33.3}$$

Для всякого $v = 1, 2, \ldots, q$ определим

$$\mathcal{F} = \min\{r \mid r = \mid U_{ik}^j \mid, S^v \in U_{ik}^j; \quad i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Величину $\mathcal{F}(Z) = \max\limits_{1 \leq v \leq q} \mathcal{F}_v$ назовем степенью близости задачи Z. Очевидно, $\mathcal{F}(Z) \leq q - 1$. Тогда существует натуральное N_0 такое, что верна

Теорема 33.1 *Для всякого $i = 1, 2, \ldots, l$ существует алгоритм $A_j = U^{q-1}\{\mathcal{A}_1\}$, корректный для Z по классу $\mathcal{K}_j$ и представимый в виде $A_j = R_j \circ r(C)$,*

$$R_j = \sum_{v \in \mathcal{R}(j)} C_{vj} \frac{1}{N_0^{\mathcal{J}_v}} R_{v_1}^j \cdot \ldots \cdot R_{v_{\mathcal{J}_v}}, \tag{33.4}$$

где $C_{vj} \in \mathbf{R}$, $R_{vi}^j = R_{vi}^{j1} - R_{vi}^{j2}$, R_{vi}^{j1}, R_{vi}^{j2} - операторы вычисления оценок.

Класс алгоритмов, корректный для всякой задачи $Z \in \mathbf{Z}$ по классу $\mathcal{K}_j$ для $j = 1, 2, \ldots, l$, назовем отделимо-корректным над $\mathbf{Z}$.Через $\mathbf{Z}^q(I_0, \delta)$ обозначим класс регулярных задач $Z(I_0, \tilde{S}^\delta)$, вес которых ограничен $V(Z) \leq q$, $0 \leq q \leq \delta$.

Следствие 33.1. Класс алгоритмов $(U^k\{\mathcal{A}_1\})$ является отделимо-корректным над $\mathbf{Z}^q(I_0, \delta)$.

Теорема 33.1 является аналогом результатов [1,2], причем вместо класса $\{\mathcal{A}\}$ рассматривается его сужение, для которого степень алгебраического замыкания понижена до $q - 1$.

Следствие 33.2. Оператор R_j из [14] принадлежит классу $\mathcal{F}(H)$, где $H = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p; h_1, h_2, \ldots h_{\tilde{L}})$, $\tau_1 = q - 1$, $\tau_2 = \ldots = \tau_p = [q/2]$, $h_1 = \ldots = h_{\tilde{L}} = 2$; $L \leq q^2 + q$.

Обозначим $\mu_0 = \max\{d \mid d = \mu_M[F(Z, L)], \bigcup\limits_{x[F(Z,L)]} [F(Z, L)] = \mathcal{F}(H)\}$.

С учетом (33.2) верна

Теорема 33.2 *Емкость класса $\mathcal{A}(L)$ ограничена:*

$$\Delta_M\{\mathcal{A}(L)\} \leq \min\{q \mid q \geq \mu_0(\log_2(x[F(Z,L)]) + 1) + 1\}.$$

Отсюда вытекает

Следствие 33. 3. Емкость класса $\mathcal{F}(H)$ ограничена:

$$\Delta_M\{\mathcal{A}(L)\} \leq \mu_0\left(C + \left(1 + \frac{\log_2(1+\log_2 C)}{\log_2 C}\right) D\log_2 C\right),$$

где $D = Ln$, $C = D(\log_2 m + \log_2 \mu_0 + 1) + 1$.

Как следует из теоремы 33.2 и следствия 33.3, оценка емкости класса $\mathcal{A}(L)$ может быть существенно понижена за счет более низкой оценки величины $\mu_M[F(Z,L)]$. Такая оценка получена в следующем утверждении.

Пусть L_p- число операторов типа P в задании произвольного операторного полинома (33.1), порождающего класс $[F(Z,L)]$.

Теорема 33.3 *Для произвольного признакового пространства M*

$$\mu_M[F(Z,L)] \leq [(L_p+1)(L-L_p+1)]^{mn}. \tag{33.5}$$

В случае $M = \mathbf{R}^n$, где $\mathbf{R}^n$ - декартово произведение метрического пространства $\langle \mathbf{R}, \rho(x,y)\rangle$, $\rho(x,y) =\mid x-y\mid$оценка (5) может быть значительно улучшена.

Теорема 33.4 *Для произвольного класса эквивалентности $[F(Z,L)]$*

$$\mu_{\mathbf{R}^n}[F(Z,L)] \leq [(L_pm+1)(L-L_p)m+1]^n. \tag{33.6}$$

Используя (33.5) , (33.6) , получаем оценку емкости $\mathcal{A}(L)$.

Теорема 33.5 *Верны неравенства:*

$$a)\Delta_M\{\mathbf{A}(L)\} \leq \left(\left[\frac{L}{2}\right]+2\right)^{2mn}[C_1 + 2D\log_2 C_1],$$

$$C_1 = D(\log_2 m + 2mn\log_2\left(\left[\frac{L}{2}\right]+2\right) + 1) + 1;$$

$$b)\Delta_{\mathbf{R}^n}\{\mathbf{A}(L)\}(Lm+1)^{2n}[C_2 + 2D\log_2 C_2],$$

$$C_2 = D(\log_2 m + 2n\log_2(Lm+1) + 1) + 1.$$

Обозначим $\mathbf{Z}^q_{\mathcal{F}}(I_0,\delta) = \{Z \mid Z \in \mathbf{Z}^q(I_0,\delta),\ \mathcal{F}(Z) \leq \mathcal{F}\}$.

Теорема 33.6 *Класс алгоритмов $\mathcal{A}(q\mathcal{F})$ отделимо корректен над множеством $\mathbf{Z}^q_{\mathcal{F}}(I_0, \delta)$ и его емкость ограничена сверху:*

$$\Delta_{\mathbf{R}^n}\{\mathcal{A}(q\mathcal{F}\} \leq (q\mathcal{F}m+1)^n[a+2b\log_2 a],$$

где $b = nq\mathcal{F}$, $a = b(\log_2 m + n\log_2(q\mathcal{F}m+1)+1)+1$.

Рассмотрим случайную и независимую выборку $\tilde{S}^{2\delta} = (\tilde{S}_\delta, \tilde{S}^\delta)$, где $\tilde{S}_\delta$ и $\tilde{S}^\delta$ соответственно обучающая и контрольная подвыборки. Пусть $Z_1 = Z_1(I_0, \tilde{S}_\delta)$ и $Z_2 = Z_2(I_0, \tilde{S}^\delta)$ -регулярные задачи из множества $Z^q_{\mathcal{F}}(I_0, \delta)$.

Тогда теорема 32.6 вместе с результатами [14] позволяет построить алгоритм с заданным качеством для задач из множества $Z^q_{\mathcal{F}}(I_0, \delta)$.

Теорема 33.7 *Существует алгоритм $A \in U^q\{\mathcal{A}\}$, корректный для $Z_1(I_0, \tilde{S}_\delta)$ и такой, что для всяких $\eta > 0, \epsilon > 0$ с вероятностью $1-\eta$ частота ошибок алгоритма A на контрольной выборке $\tilde{S}^\delta$ $v(A) \leq \epsilon$, если*

$$\delta \geq \frac{4}{\epsilon}(q\mathcal{F}m+1)^n\left(1-\ln\frac{\epsilon}{4}-\ln\frac{\eta}{3}\right)(a+2b\log_2 a).$$

Рассмотрим следующую модификацию метода построения отделимо корректного класса алгоритмов для регулярных задач. Определим для всякой пары натуральных чисел (v,k), $1 \leq v \leq k \leq p(i,k)$ множество допустимых объектов

$$\mathcal{L}^r_v(i,k) = \bigcup_{v\leq j\leq r} U^j_{ik},$$

где U^j_{ik} взяты из (33.3), которое назовем (i,k)-интервалом, и пусть $S(\mathcal{R}) = \{S^v \mid v \in \mathcal{R}(j)\}$.

Определение 33.1. Покрытием множества $\hat{S} \subset \tilde{S}^\delta$ будем называть всякую последовательность (i,k)-интервалов $\mathcal{L}^{r_1}_{v_1}(i_1,k_1), \ldots, \mathcal{L}^{r_w}_{v_w}(i_w,k_w)$ такую, что $\hat{S} \subset \left(\bigcup_{1\leq j\leq w} \mathcal{L}^{r_j}_{v_j}(i_j,k_j)\right)$ и обозначить $\pi(W, \hat{S})$.

Рассмотрим избыточное множество покрытия $\pi(W, \hat{S})$.

$$C_\pi(W, \hat{S}) = \left(\bigcup_{1\leq j\leq w} \mathcal{L}^{r_j}_{v_j}(i_j,k_j)\right) \setminus \hat{S}$$

Пусть $\pi_1(W_1, S(\mathcal{R})), \pi_2(W_2, S(\mathcal{R})), \ldots, \pi_\Sigma(W_\Sigma, S(\mathcal{R}))$ - последовательность всех покрытий множества $S(\mathcal{R})$. Каждому ее элементу $\pi_j(W_j, S(\mathcal{R}))$

будет соответствовать конечная последовательность покрытий избыточного множества $C\pi_j = C\pi_j(W_j, S(\mathcal{R}))$:

$$\pi_{1j}(W_{1j}, C\pi j), \pi_{2j}(W_{2j}, C\pi j), \ldots, \pi_{\sigma j}(W_{\sigma j}, C\pi j).$$

Для множества допустимых объектов

$$\Xi(x, j, S(\mathcal{R})) = S(\mathcal{R}) \cap \pi_{xj}(W_{xj}, C\pi_j)$$

определим величину $\xi_{xj} =\mid \Xi(x, j, S(\mathcal{R})) \mid$. Пусть функция $E(x, j) = W_j + W_{xj} + \xi_{xj}$ достигает минимума в точке (x_0, j_0):

$$E(x_0, j_0) = \min\{E(x, j) \mid x = 1, 2, \ldots, \sigma; j = 1, 2, \ldots, \Sigma\}.$$

Тогда верна

Теорема 33.8 *Для всяких $\eta > 0, \epsilon > 0$ с вероятностью $1 - \eta$ каждый алгоритм $A \in \mathcal{A}(W_{j_0} + W_{x_0 j_0}))$ вида (4), имеющий частоту ошибок $v'(A) \leq \xi_{x_0 j_0}$ на обучающей выборке, будет иметь частоту ошибок на контрольной выборке $v''(A) \leq \xi_{x_0 j_0} + \varepsilon$, если ее длина*

$$\sigma \geq \frac{2}{\epsilon^2}(2(W_{j_0} - W_{x_0 j_0})m + 1)^n \times$$
$$\times \left[\left(1 - \ln \frac{\epsilon^2}{2}\right) \left(C + 2D \log_2 C + 1 - \frac{2\ln(\eta/5)}{\epsilon^2}\right) \right],$$

где $D = (W_{j_0} - W_{x_0 j_0})n$, $C = D(\log_2 m + n \log_2(W_{j_0} - W_{x_0 j_0})m + 1) + 1$.

Литература

[1] Аттетков А.В., Волков И.К.. Решение одного класса задач нестационарной теплопроводности в области с движущей границей методом расщепления обобщчнного интегрального преобразования Фурье. // Вестник Московского государственного технического университета є1. Москва, 1998.-с.40-48.

[2] Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля в классе матричнозначных функций гармонических в единичном круге и его применения // Математический анализ, Межвуз. сб. науч. т. М.: Прометей, 2000. - С. 3-12.

[3] И.И.Баврин.Интегральные формулы Баврина в случае двух и многих комплексных переменных// М.:Доклады РАН,Т. 414 , №, 4 ,С.

[4] Баврин И.И., Яремко О.Э. Интегральные представления в областях Темлякова-Вейля// М.:ДАН СССР,1986, 289,№6. С. 1293-1996.

[5] Баврин И.И., Яремко О.Э. Операторный метод в теории интегральных преобразований для кусочно-однородных сред // М.:Доклады РАН,2001.Т.379,№3.С.295-298.

[6] Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. Матричные интегральные преобразования для задач математической физики неоднородных структур. М.- Прометей, 1998. 238 с.

[7] Баврин И.И., Яремко О.Э. О локализации средних Рисса спектральных разложений в кусочно- однородном полупространстве// М.:Доклады РАН,2002.Т.387, №5. С.586-588.

[8] Баврин И.И., Яремко О.Э. Интегральные преобразования Фурье на компактах из R^n и их приложения к проблеме моментов// М.:Доклады РАН,2000.Т.374,№2.С.154-156.

[9] Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. Интегральные преобразования и представления функций в действительной и комплексной областях. М.: Прометей, 2000./416 с.

[10] Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1988. 200 с.

[11] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.:Наука,1996.480 с.

[12] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.:1979. 448 с.

[13] Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.:Наука, 1964.412с.

[14] Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов // I.- Кибернетика , 1977, №4. С.14-21; II.- Кибернетика , 1977, №6. С.21-27; III.- 1978,№2.С.35-43.

[15] Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 368 с.

[16] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.М.: Физматиз, 1976. 544 с.

[17] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.

[18] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

[19] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 476 с.

[20] Ленюк М.П. Интегральные преобразования Фурье на кусочно-однородной полупрямой //Изв. вузов. Математика. 1989. Т. 4. С.14-18.

[21] Ленюк М.П., Яремко О.Э. Матричные интегральные преобразования. Киев: Ин- т математики НАН Украины, 1999. 240 с.

[22] Левитан Б.М., Саргаян И.С. Операторы Штурма- Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 156 с.

[23] Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

[24] Матросов В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов// Докл.АН СССР,1980.Т.253. №1.С.25-30.

[25] Matrosov V.L. On completeness criteria for a model of algorithms computing estimates and its algebraic closures// Dokl. Akad.Nauk USSSR,1981.Vol.258.№4.

[26] Matrosov V.L. Optimal Algorithms in Algebraic Closures of Estimation Operators// Dokl. Akad.Nauk USSSR,1982.Vol.262. №4. P.818-828.

[27] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из C^n . М.: Мир,1984. 456 с.

[28] Самарский А.А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами// ДАН СССР. Т.121, №2, 1958. С.225-228.

[29] Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит- ры, 1955. 668 с.

[30] Темляков А.А.// Интегральные представления функций двух комплексных переменных// ДАН СССР. Т.120,№5,1958.

[31] Темляков А.А. Интегральные представления // Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, 1960. Т.96, С.3-14.

[32] Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т.I. 278 с.

[33] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

[34] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т. М.: Мир, 1967. Т.2. 748 с.

[35] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 832 с.

[36] Хенкин Г. М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе// Современные проблемы математики: Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М.: 1985, №7. С. 23- 124.

[37] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.

[38] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 398 с.

[39] Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.

[40] История отечественной математики. Киев, 1970. Т.4, кн.1.(отв редактор И.З.Штокало)

[41] Яремко О.Э. Преобразования с ядрами Миттаг-Леффлера на кусочно-однородной полуоси и их обращение при помощи преобразований Фурье //Международная школа- семинар по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Тезисы докл.- Абрау-Дюрсо,1998.С.140-141.

[42] Яремко О.Э. Матричные гибридные интегральные преобразования и их применения. Киев: Ин- т математики НАН Украины, 1997. 117 с.

[43] Opial Z., Siciak I.// Integral formulas for functions golomorphic in convex n-circular domains. Zesz. Nauk. Jagiell. 1963. №77.

Оглавление

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Баврин Иван Иванович,

Матросов Виктор Леонидович,

Яремко Олег Эммануилович

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Подписано в печать 08.02.2016.
Формат 60 × 84/16. Печ. л. 22,375.
Тираж 100 экз. Заказ № 528.

Издательство «Прометей»
115035, Москва, ул. Б. Садовническая, д. 72, стр. 1.
Тел./факс: 8 (495) 799-54-29.
E-mail: info@prometej.su

ISBN 978-5-9907453-8-4

9 785990 745384